N° d'ordre
97

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Yves JULLIEN
Ingénieur E.N.S.M.

PREMIÈRE THÈSE

Sur les vibrations de systèmes élastiques présentant des discontinuités de conformation

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 1er Juillet 1961 devant la Commission d'Examen

MM. J. VALENSI — *Président*

P. ROUARD
H. CABANNES
Th. VOGEL
} *Examinateurs*

N° d'ordre
97

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Yves JULLIEN
Ingénieur E.N.S.M.

PREMIÈRE THÈSE

Sur les vibrations de systèmes élastiques
présentant des discontinuités de conformation

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 1er Juillet 1961 devant la Commission d'Examen

MM. J. VALENSI *Président*

P. ROUARD
H. CABANNES } *Examinateurs*
Th. VOGEL

FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE
UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Mort au Champ d'Honneur, M. F. MARTY,
Maître de conférences de Mathématiques
(14 juin 1940)

DOYENS HONORAIRES

MM. MARCHAUD, TRAYNARD, CORROY, CHOUX.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. J. MARCHAUD, E. TRAYNARD, J. PERES, G. PETIT, R. THIRY
J. BOSLER, A. TIAN, L. MARGAILLAN, P. BENOIT, H. CABANNES.

DOYEN : M. P. ROUARD — ASSESSEUR : M. P. CHOUX

SECRETAIRE PRINCIPAL

M. C. MOYNAULT.

PROFESSEURS

MM. G. CORROY	Géologie et minéralogie	G. CARPENI	Chimie M. P. C.
P. CHOUX	Botanique.	C. JAUSSERAN	Physique M. P. C.
R. CERIGHELLI	Agronomie tropicale.	R. MOLINIER	Biologie végétale.
J. VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides.	Y. DOUCET	Physique M. P. C.
		J. M. SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique.
P. ROUARD	Physique générale.		
H. PRAT	Botanique.	P. COTTON	Electronique.
P. DESNUELLE	Chimie biologique.	J. METZGER	Chimie S. P. C. N.
M. ABELOOS	Biologie générale.	J. TIMON-DAVID	Zoologie.
R. MERIGOUX	Physique industrielle.	L. FOURES	Mathématiques.
P. VINCENSINI	Calcul différentiel et intégral.	D. MALE	Physique.
		G. BODIOU	Mathématiques appliquées.
E. CALVET	Chimie générale.		
C. FEHRENBACH	Astronomie.	M. NAUDET	Chimie des corps gras.
A. FAVRE	Mécanique statistique de l'Atmosphère.	F. NAHON	Mathématiques.
A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle.	J. PAILLARD	Psycho-physiologie.
J. M. PERES	Océanographie biologique.	P. BOUSQUET	Physique S. P. C. N.
		P. PESTEIL	Physique P. C. B.
L. SAVIDAN	Chimie P. C. B.		
D. KASTLER	Physique théorique.		

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. C. GOUVERNET	Géologie appliquée.	A. JULG	Chimie théorique.
C. CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides.	S. WACHS	Mathématiques générales (Institut de Nice)
R. AMAR	Biologie animale P. C. B.	J. CHOUTEAU	Physiologie animale.

MAITRES DE CONFERENCES

MM. A. VISCONTI	Physique théorique.	J. TROMPETTE	Physique S. P. C. N.
J. LEFEBVRE	Chimie M. P. C.	R. MONIER	Chimie biologique.
L. DEVEZE	Biologie marine.	M. LAFFITTE	Chimie M. P. C.
S. TAXY (Mme)	Géologie historique.	L. SIDERIADES	Dynamique des vibrations.
M. BLANCHARD	Mathématiques générales.	J. MANDELBROJT	Physique nucléaire.
M. L. FURNESTIN (Mme)	Biologie animale.	F. BOREL	Mathématiques.
M. BERTRAND	Chimie S. P. C. N.	J. BLANC	Géologie marine.
		M. DUSSARDIER	Physiologie animale.
		R. CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie générale.

CHARGES DE CONFERENCES

MM. P. BENOIT	Physiologie.	L. COHEN-SOLAL	Physique.
J. MORIN	Neurophysiologie.	MOLINIER Roger	Biologie végétale.
B. GOUZON	Physiologie.	J. RICARD	Physiologie végétale.
V. CHARLIER DE CHILLY	Mathématiques.	D. SCHACHTER (Mme)	Ecologie terrestre et limnique.
H. GAVINI (Mlle)	Psycho-physiologie.		
P. JEAN	Physique.	L. GAFFIER	Botanique.
J. SENEZ	Chimie biologique.	LAGARDE (Mlle)	Chimie générale.
M. COTTON (Mme)	Mathématiques.	CATZIGRAS (Mlle)	Géologie.
H. GASTAUT	Neurophysiologie.	MATTEI (Mme)	Botanique.
M. BEZAGUET	Chimie.		
S. GUEIRARD (Mlle)	Pétrographie.		

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

A Monsieur Théodore VOGEL,

Hommage respectueux et reconnaissant

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547028_0039

INTRODUCTION

Connaitre un système mécanique, particulièrement dans le domaine de la théorie des vibrations, revient généralement à résoudre ce qu'on appelle en langage mathématique un "problème aux limites". Un tel problème est caractérisé par deux sortes d'équations: les premières, qui définissent les lois auxquelles est soumis le système étudié, sont en général des équations différentielles ou à dérivées partielles; les secondes, de même forme que les premières, dépendent du milieu dans lequel est plongé le système: ce sont les conditions aux limites. Dans le domaine linéaire, et nous nous limiterons à cette étude, un tel système est par exemple défini par:

$$(a) \qquad \begin{aligned} Lu(M) &= 0 \qquad M \in D \\ Uu(Q) &= 0 \qquad Q \in \dot{D}, \end{aligned} \qquad \dot{D} \text{ frontière de } D.$$

L et U sont des opérateurs différentiels linéaires.

Une façon habituelle de traiter ces problèmes consiste à se référer à un cas particulier et singulier, dont l'importance est telle que sa solution a reçu le nom de "singularité fondamentale" du système : c'est le cas où l'excitation extérieure F(M) se réduit à une mesure de Dirac, concentrée en un certain point P du domaine. Cette méthode classique de résolution met en évidence le rôle joué par ce qu'on peut appeler les masses concentrées en des points isolés, notion physique qui se traduit mathématiquement par une mesure de Dirac.

Or, on conçoit que la concentration ponctuelle des excitations données n'est pas la seule qui puisse se présenter dans un système, et que celle de certaines caractéristiques du milieu qui est le siège des phénomènes, puisse avoir un intérêt aussi grand. Un tel cas se traduit mathématiquement par

l'intervention de la mesure de Dirac dans le corps de l'opérateur différentiel lui-même.

Dans le présent travail nous avons porté notre attention sur les opérateurs où la mesure de Dirac affecte le terme d'ordre 0, c'est à dire sur ceux qui peuvent s'écrire:

$$Lu(M) = L_1 u(M) + u(M)\ \delta(P)$$

Du point de vue des applications, nous nous intéresserons particulièrement aux problèmes des vibrations élastiques des corps minces (poutres et plaques); l'opérateur différentiel qui régit ces sortes de problèmes est du quatrième ordre, et les conditions aux limites sont au nombre de deux, de sorte qu'on a affaire à deux opérateurs du type U et que le problème aux limites à résoudre s'écrit définitivement:

$$(b)\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} Lu(M,P) = \delta(P)\ u(M,P) \\ Uu(Q,P) = Vu(Q,P) = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} M \in D \\ Q \in \dot{D} \end{matrix}$$

Divers travaux, puisés aussi bien dans le domaine de la physique ou celui des mathématiques que dans celui des sciences de l'ingénieur, ont trait à des problèmes bien particuliers de déformation (ou même de vibration) des corps élastiques. Les auteurs ont l'habitude de faire intervenir des discontinuités semblables à celles précitées dans des conditions dites de raccordement, et laissent ainsi la forme classique de l'opérateur de l'équation différentielle qui régit le mouvement. Nous citerons parmi ces travaux ceux de Lee et Saibel, Timoshenko, Jacobsen et Ayre, Hetenyi .... Il semble que, soit à cause des calculs fastidieux qu'entraine cette méthode, soit parfois à cause de l'impossibilité des vérifications des conditions de raccordement, certains problèmes aient été omis. Si on les examine de plus près, on s'aperçoit qu'ils appartiennent tous à la classe dont nous venons de parler, c'est à dire qu'ils sont régis par le système (b). Dans le présent travail, nous avons voulu faire un essai de synthèse de ces questions, et, par cette généralisation nous verrons que certains résultats connus ne sont que des cas particuliers des solutions de problèmes plus généraux.

Pour pouvoir résoudre le système (b), nous effectuerons deux opérations successives: recherche de la solution générale de $(b)_1$ et son adaptation aux conditions $(b)_2$.

De la nature de $(b)_1$, il ressort que la transformation par intégrales de Fourier, qui aura les grands avantages de transformer:

1°) Lu en une expression algébrique du quatrième degré;
2°) le produit de deux fonctions en un produit de composition des transformées de chaque fonction;
3°) la singularité $\delta(P)$ en une constante,

semble particulièrement indiquée pour trouver la solution générale $u(M, P)$. On pourra également, selon le domaine D, considérer les intégrales comme des intégrales de Stielges et utiliser alors les séries de Fourier.

Le domaine D, le plus simple auquel on puisse penser, se réduit à une dimension. Nous avons un nombre fini de discontinuités soit appartenant à D, soit extérieures (fictives) pour remplir les deux conditions aux limites aux deux points Q_1 et Q_2; le déterminant du système ainsi formé devra être nul, d'où l'équation aux valeurs propres.

Cette étude, qui aura son application physique dans les vibrations transversales de poutres présentant des discontinuitésde masse fera l'objet de la première partie du présent travail. On l'étendra également au problème du couplage de poutres (portique). Le cas particulier de la statique sera traité lorsque le résultat présentera une certaine originalité.

On considérera ensuite D comme un domaine à deux dimensions. Pour des conditions aux limites convenables, on a également un nombre fini de discontinuités, et le problème sera analogue à celui relatif à une dimension. C'est le cas de la plaque appuyée. Lorsque les discontinuités sont en nombre infini (c'est le cas de la plaque libre) on peut utiliser les solutions de deux problèmes voisins connus de solutions g et γ ; les fonctions g et γ , qui satisfont à l'équation différentielle dans D et respectivement à la première et à la seconde des conditions aux limites serviront à trouver la solution u du problème cherché, en vertu du principe de superposition, soit:

$$u = \int_C m\, g\, dC + \int_\Gamma \mu\, \gamma\, d\Gamma$$

Le problème se ramène à la recherche des densités m et et des contours C et telles que:

$$V \int_C mg \, dC = U \int_\Gamma \mu \gamma \, d\Gamma = 0$$

en utilisant les notations déjà utilisées dans le système (b).

Pour le calcul effectif on aura recours à la méthode de Ritz en tenant compte bien entendu de la discontinuité introduite dans l'expression de l'énergie de la plaque; on utilisera les fonctions propres des poutres du portique pour traiter un problème particulier: plaques assemblées entre elles.

Enfin, nous avons jugé nécessaire de confronter les résultats de la théorie avec l'expérience; nous rendrons compte des dispositifs adoptés et des mesures faites, à propos de chaque problème théorique. D'une façon générale, l'accord entre la théorie et l'expérience s'est revelé satisfaisant.

°
° °

Le présent travail a été exécuté au laboratoire d'acoustique-vibrations du Centre de Recherches Scientifiques de Marseille.

Nous sommes heureux, à cette occasion, d'adresser nos sincères remerciements à M. F. Canac, Directeur Honoraire au C. R. S. I. M., qui nous a accueilli si gentiment au C. N. R. S., et a bien voulu mettre à notre disposition le personnel et les moyens techniques nécessaires au démarrage de cette étude.

Que le personnel technique et administratif du C. R. S. I. M. trouve ici le témoignage de notre reconnaissance pour le zèle, le dévouement et l'application qu'il a apportés soit à la réalisation des montages, soit à la présentation définitive de ce travail.

Que M. Th. Vogel, Directeur du C. R. S. I. M. , trouve ici l'expression de notre profonde gratitude pour les précieux et fructueux conseils, ainsi que les encouragements qu'il nous a prodigués avec tant d'amabilité tout au long de l'élaboration de cette thèse.

Qu'il nous soit permis d'adresser nos sentiments respectueux et nos sincères remerciements à MM. les Professeurs:

P. Rouard,	Doyen de la Faculté des Sciences de Marseille, Professeur de Physique Générale;
J. Valensi,	Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides, Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille;
H. Cabannes,	Professeur de Mécanique Générale à la Faculté des Sciences de Paris;
Th. Vogel,	Directeur Scientifique au C. N. R. S. ,

qui ont bien voulu accepter de composer le Jury.

PREMIÈRE PARTIE

PROBLÈMES A UNE DIMENSION

Applications: vibrations de poutres sur fondation élastique .

Sommaire:

L'exposé général de la méthode des masses fictives (Chap. I) permet de traiter des vibrations de poutres présentant des discontinuités de masse (Chap. II). On étudie successivement toutes les conditions aux limites correspondant aux modes de fixation des extrémités de la poutre habituellement utilisées dans la pratique: appuyée, encastrée, libre, ainsi qu'un mode de fixation qui semble nouveau et que l'on a nommé "encastrée-guidée".

Les résultats prévus par la théorie sont confrontés avec ceux résultant de l'expérience réalisée dans les deux cas particuliers de la poutre libre et appuyée.

On étendra les résultats obtenus à l'étude d'un problème de couplage de poutres: vibrations d'un portique (Chap. III). La singularité de ce problème, et les résultats (tant théoriques qu'expérimentaux) nous ont conduit à en faire également l'étude statique, ce qui ne manque pas d'intérêt pratique.

CHAPITRE I

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE

A - EQUATION GENERALE INDEFINIE

Soit une poutre de longueur 2l, ayant une densité linéaire de masse μ, reposant sur sol élastique de coefficient de réaction k Soit f le déplacement de la fibre neutre à l'abscisse x (Fig 1). L'origine des abscisses sera prise à l'une des extrémités de la poutre. Calculons l'action Lagrangienne T - V du système: l'énergie cinétique sera:

$$T = \frac{1}{2}\int \mu\ (x)\ f'^{2}_{t}\ dx,$$

où (x) est la masse de l'élément différentiel dx de la poutre

L'énergie potentielle V est due d'une part à l'action du sol élastique, d'autre part à l'effet du moment fléchissant en un point de la poutre. Le sol, supposé élastique, crée en chaque point de la verge une force proportionnelle au déplacement p = kf; le travail développé sera donc de:

$$\int k\, f^{2}\, dx$$

L'énergie de flexion de la poutre est

$$\int \frac{1}{2}\ \frac{M_f^{2}}{EI}\ dx, \quad \text{où } M_f \text{ représente le moment fléchissant,}$$

relié d'ailleurs à la déformation par $M_f = EI f''_{x^2}$, E le module d'Young, I le moment d'inertie transversal, et l'énergie de flexion prendra alors la forme

$$\int \frac{1}{2} EI f''^{2}_{x} \, dx \ .$$

Finalement, en tenant compte de ces deux contributions, et de l'énergie cinétique, l'action Lagrangienne F est:

$$F = \frac{1}{2} \int \mu(x) f_t'^{2} - k f^{2} - EI f''^{2}_{x} \, dx$$

et on peut appliquer le principe de la variation stationnaire à l'expression:

$$\iint \left[\mu(x) f_t'^{2} - k f^{2} - EI f''^{2}_{x} \, dx \, dt \right] = \iint J(x,t) \, dx \, dt \qquad (1)$$

L'équation d'Euler-Lagrange, relative à la fonction J qui dépend de deux variables x et t, s'écrira:

$$\frac{\partial J}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial J}{\partial f'_x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial J}{\partial f'_t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial J}{\partial f''_{x^2}} = 0 \qquad (2)$$

ce qui donne, d'après (1):

$$EI f^{IV}_{x^4} + kf + \mu(x) f''_{t^2} = 0$$

Cette équation est séparable en t, si l'on pose $f = y e^{i\omega t}$:

$$EI y^{IV}_{x^4} + \left[k - \omega^2 \mu(x) \right] y = 0 \qquad (3)$$

où $\mu(x)$ dépendra de x.

Remarque:

Notons que si k dépend de la variable x, nous obtenons également:

$$EI y^{IV}_{x^4} + \left[k(x) - \omega^2 \mu(x) \right] y = 0$$

Il n'en est pas de même pour le terme EI, dont la variation avec x entrainerait, en vertu du principe variationnel, l'addition au premier membre de (3) des termes:

$$2 f'''_{x^3} \cdot \frac{\partial (EI)}{\partial x} + f''_{x^2} \frac{\partial (EI)}{\partial x}$$

Si la poutre présente une discontinuité de masse, l'équation (3) qui régit son mouvement sera bien de la forme: $L\,g(M,P) = \partial(P).\,g(M,P)$ dont il a été question dans l'introduction. Le problème ainsi posé appartiendra à la classe de problèmes que nous nous sommes proposé de résoudre.

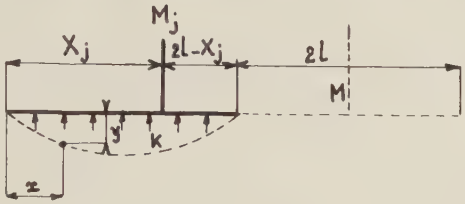


Figure 1

B - SOLUTION GENERALE

Supposons, pour fixer les idées, que la densité $\mu(x)$ soit une distribution qui comporte une partie μ, répartie de façon uniforme sur la longueur de la poutre et des masses concentrées en certains points d'abscisses X_j (Fig 1). Nous poserons

$$\mu(x) = \mu + \sum_j \partial(x - X_j)\, M_j,$$

où μ est une constante[1].L'équation (8) prendra donc la forme:

$$E I\, y^{IV}_{x^4} + (k - \mu\omega^2)\, y = \omega^2\, y \sum_j \partial(x - X_j)\, M_j \qquad (4)$$

Pour la résoudre, il est tout indiqué d'appliquer une transformation finie de Fourier, qui la transformera en équation algébrique. Si l'on pose

$$\mathcal{F}_s\, y(x) = b_s = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} e^{-is\frac{\pi x}{2l}}\, y(x)\, dx,$$

la transformation inverse[2] sera:

$$\mathcal{F}^{-1}_x (b_s) = y(x) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s\, e^{is\frac{\pi x}{2l}}$$

L'équation différentielle (4) devient alors:

$$\left[EI \frac{\pi^4}{(2l)^4} s^4 + (k - \mu\omega^2) \right] b_s = \mathcal{F} \sum_j \partial(x - X_j) M_j \times \omega^2 y(x)$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$-\alpha^2 = \frac{k - \mu\omega^2}{EI} \left(\frac{2l}{\pi}\right)^4 \qquad \sigma_j = \frac{M_j (2l)^3}{EI\,\pi^4} \omega^2 \qquad \xi = \frac{\pi x}{2l} \qquad \bar{\xi} = \frac{\pi X}{2l} \tag{5}$$

La propriété fondamentale des transformations de Fourier donne

$$\mathcal{F} \sum_j \partial(x - x_j) M_j \cdot \omega^2 y = \mathcal{F} \sum_j \partial(x - x_j) \omega^2 M_j \quad * \quad b_s$$

Or: $\mathcal{F} \sum_j \partial(x - x_j) \omega^2 M_j = \sum_j e^{-is\bar{\xi}_j} M_j \omega^2$

D'où:

$$\mathcal{F} \sum_j \partial(x - x_j) \omega^2 M_j \quad * \quad b_s = \sum_j \sum_{p-s=-\infty}^{+\infty} \omega^2 M_j \, b_{p-s} \, e^{-ip\bar{\xi}_j} \tag{6}$$

En tenant compte de (5) et de (6), l'équation (4) ainsi transformée devient:

$$b_s (s^4 - \alpha^2) = \sum_j \sum_{p-s} \sigma_j \, e^{-ip\bar{\xi}_j} \, b_{p-s} = \sum_{p-s} b_{p-s} e^{-i(p-s)\bar{\xi}_j} \times \sum_j \sigma_j e^{-is\bar{\xi}_j} \tag{7}$$

En posant:

$$A_j = \sum e^{-i(p-s)\bar{\xi}_j} b_{p-s} \tag{8}$$

Il vient finalement:

$$b_s = \sum \frac{\sigma_j A_j e^{-is\bar{\xi}_j}}{s^4 - \alpha^2} \tag{9}$$

La solution y(x) s'obtient par la transformation inverse $\mathcal{F}^{-1} b_s$:

$$y(x) = \sum_j \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_j A_j e^{-is\bar{\xi}_j}}{s^4 - \alpha^2} e^{is\xi} \qquad (10)$$

Multiplions les deux membres de (9) par $e^{-is\bar{\xi}_i}$ et sommons en s; nous obtenons j équations donnant les A_i :

$$A_i = \sum_j \sigma_j A_j \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-is(\xi + \bar{\xi}_j)}}{s^4 - \alpha^2} \qquad (11)$$

Nous appellerons ces équations (11), les équations d'identification.

C - CONDITIONS AUX LIMITES ET DISCUSSION

Nous dirons que les M_j sont réelles ou fictives selon que les abscisses réduites $\bar{\xi}_j$ seront inférieures ou supérieures à 2ℓ. Si l'on passe des quantités complexes aux quantités réelles il y aura 2j coefficients A_j, donc 2 j équations (11) . Supposons donc que l'on ait j masses réelles Dans le cas le plus général, cela nous donnera après identification dans l'équation générale indéfinie 2 j coefficients, donc 2 j équations d'identification . Soit p le nombre de conditions aux limites distinctes (ne pouvant excéder 4) . Nous avons 2 j + p équations pour 2 j coefficients ; seule possibilité de résolution p = 0: les équations seront donc telles que les solutions vérifieront obligatoirement les conditions aux limites.

Supposons maintenant qu'on adjoigne m masses fictives aux m abscisses inconnues. Nous aurons donc 2j + 2m + p équations pour 4m + 2 j coefficients . En effet, 2m coefficients + m charges fictives + m abscisses + 2 j coefficients = 4 m + 2j

La condition de résolution sera donc $2j + 2m + p = 4m + 2j$, soit $p = 2m$. Plus exactement, il s'agit de $4m + 2j + 1$ inconnues (la fréquence propre étant inconnue), dont il faut déterminer un coefficient en fonction des autres comme dans tous les problèmes de vibrations propres: $2j + 2m + p = 4m + 2j + 1 - 1$, $P = 2m$.

1. - Pas de masse fictive, m=0, p=0 ce sera le cas de $X_j > 41$
2. - Une masse fictive m = 1, il faudra donc 2 conditions aux limites distinctes.
3. - Deux masses fictives m = 2, ce qui entrainera quatre conditions aux limites distinctes; ce sera le cas le plus général

Cas particulier:

Supposons que la répartition des masses additionnelles présente une certaine symétrie. Nous pourrons prendre l'axe de symétrie comme origine des abscisses, et nous ne considérerons comme partie réelle que la demi-longueur de la poutre: Soient j masses réelles et m masses fictives. Nous aurons $m + j + p$ équations, si p est le nombre de conditions aux limites. Le nombre d'inconnues est $3m + j$, soit $m + j$ coefficients A_s, m coefficients σ_s, et m abscisses. Il faudra donc que $3m + j = m + j + p$, d'où : $p = 2m$. Pour une demi-poutre le nombre maximum de conditions aux limites est de 2 une seule masse additionnelle sera nécessaire. Un tel problème particulier pourra donc être résolu de quatre manières :

a) sans tenir compte de la symétrie, en adjoignant deux masses fictives dont on déterminera M et X.
b) en tenant compte de la symétrie, en prenant deux masses fictives dont on se donne les intensités et dont on déterminera les positions.
c) même procédé que le précédent, mais la connaissance des positions permettra de déduire les intensités.
d) en tenant compte de la symétrie, en prenant une masse dont on déterminera la position et l'intensité.

Nous illustrerons ces résultats particuliers en traitant plus loin le problème des vibrations transversales de la poutre libre supportant une masse M en son milieu par les procédés c et d.

Le chapitre suivant sera consacré à l'examen de ces trois cas généraux 1. 2. 3.

Le cas 1 ci-dessus (pas de masse fictive) est nécessairement lui aussi, un cas particulier: nous commencerons par le traiter, à cause de sa singularité, pour illustrer le procédé qui sera appliqué aux problèmes plus difficiles qui suivent, et parce qu'il nous suggérera des conditions aux limites inhabituelles quoique bien réalisables.

°
° °

CHAPITRE II

VIBRATIONS DE POUTRES

(avec discontinuité de masse, et reposant sur fondation élastique)

A. - PAS DE MASSE FICTIVE

Ce cas ne peut se présenter que pour une poutre dont la masse présente une seule discontinuité en son milieu. Nous prendrons comme coordonnées réduites: $\xi = \frac{\pi x}{l}$ (la poutre est de longueur $2l$), et $X = l$, l'origine des abscisses étant le milieu de la poutre (Fig. 2).

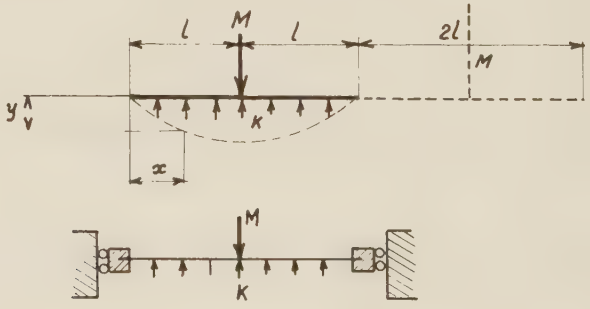


Figure 2

Les équations (9) et (10) deviennent:

$$b_s = \frac{\sigma A e^{-is}}{s^4 - \alpha^2} \quad , \quad y = \sigma A \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos s\pi \cos sx}{s^4 - \alpha^2}$$

Quant à l'équation (11), en tenant compte de ce que $e^{-2i\pi} = 1$, elle devient

$$-\frac{1}{\sigma} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^4 - \alpha^2}$$

Tableau I

$$S = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\cos \sqrt{\alpha}\pi}{\sin \sqrt{\alpha}\pi} + \frac{\cosh \sqrt{\alpha}\pi}{\sinh \sqrt{\alpha}\pi} \right)$$

$$T = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\cos s\pi}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left(\frac{1}{\sin \sqrt{\alpha}\pi} + \frac{1}{\sinh \sqrt{\alpha}\pi} \right)$$

$$U = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\cos s(\pi/2)}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{4\alpha\sqrt{\alpha}} \left(\frac{1}{\sin \sqrt{\alpha}(\pi/2)} + \frac{1}{\sinh \sqrt{\alpha}(\pi/2)} \right)$$

$$V = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 s(\pi/2)}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{4\alpha} \left(\frac{\cos \sqrt{\alpha}(\pi/2)}{\sin \sqrt{\alpha}(\pi/2)} + \frac{\cosh \sqrt{\alpha}(\pi/2)}{\sinh \sqrt{\alpha}(\pi/2)} \right)$$

$$K = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s \sin s(\pi/2)}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{4\alpha} \left(\frac{1}{\cos \sqrt{\alpha}(\pi/2)} - \frac{1}{\cosh \sqrt{\alpha}(\pi/2)} \right)$$

$$Z = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s^2 \cos s(\pi/2)}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{4\sqrt{\alpha}} \left(\frac{1}{\sinh \sqrt{\alpha}(\pi/2)} - \frac{1}{\sin \sqrt{\alpha}(\pi/2)} \right)$$

$$W = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s^2 \cos^2 s(\pi/2)}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{4\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\cosh \sqrt{\alpha}(\pi/2)}{\sinh \sqrt{\alpha}(\pi/2)} - \frac{\cos \sqrt{\alpha}(\pi/2)}{\sin \sqrt{\alpha}(\pi/2)} \right)$$

$$X = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s^3 \sin s(\pi/2)}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{\cos \sqrt{\alpha}(\pi/2)} + \frac{1}{\cosh \sqrt{\alpha}(\pi/2)} \right)$$

$$Y = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s^3 \sin s(\pi/2) \cos s(\pi/2)}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{2} \qquad H = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s \sin s(\pi/2) \cos s(\pi/2)}{s^4 - \alpha^2} = 0$$

$$S(X) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 s\pi X}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left[\frac{\cos \sqrt{\alpha}\pi X}{\sin \sqrt{\alpha}\pi} \cos \sqrt{\alpha}\pi(1-X) + \frac{\cosh \sqrt{\alpha}\pi X}{\sinh \sqrt{\alpha}\pi} \cosh \sqrt{\alpha}\pi(1-X) \right]$$

$$T(X) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 s(\pi X/2l)}{s^4 - \alpha^2} = -\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left[\frac{\sin \sqrt{\alpha}\pi X}{\sin \sqrt{\alpha}\pi} \sin \sqrt{\alpha}\pi(1-X) - \frac{\sinh \sqrt{\alpha}\pi X}{\sinh \sqrt{\alpha}\pi} \sinh \sqrt{\alpha}\pi(1-X) \right]$$

$$Q = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\sin s(\pi X/2l) \sin s(\pi X_1/2l)}{s^4 - \alpha^2} \qquad R = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\cos s(\pi X/2l) \cos s(\pi X_1/2l)}{s^4 - \alpha^2}$$

$$N = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\cos s(\pi X/2l)}{s^4 - \alpha^2} \qquad P = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s^2 \cos s(\pi X/2l)}{s^4 - \alpha^2}$$

En utilisant les résultats du Tableau I, qui rend compte des différentes séries utilisées pour cette étude, il vient:

$$y = \frac{\pi\sigma}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\cos\sqrt{\alpha}\,\xi}{\sin\sqrt{\alpha}\,\pi} + \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\,\xi}{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\,\pi} \right) \qquad \text{pour } 0 < \xi < \pi \tag{12}$$

et:

$$y = \frac{\pi\sigma}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\cos\sqrt{\alpha}\,(\pi-\xi)}{\sin\sqrt{\alpha}\,(\pi)} + \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\,(\pi-\xi)}{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\,(\pi)} \right) \qquad \text{pour } \pi < \xi < 2\pi$$

Les fréquences propres seront données par l'équation aux valeurs propres :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{cotg}\sqrt{\alpha}\,\pi + \operatorname{coth}\sqrt{\alpha}\,\pi \right) \tag{13}$$

Nous avons posé $- EI\,\alpha^2\,\pi^4 = l^4\,(k - \mu\omega^2)$ et $EI\,\pi^4\sigma = M l^3$

pour obtenir l'équation réduite (4) les équations (5) ne sont plus vérifiées en vertu de ce que $\xi = \pi x / l$

Les fréquences propres $N = \omega / 2\pi$ seront alors:

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{\mu} + \frac{EI\pi^4\alpha^2}{\mu l^4}}$$

si l'on pose $q = \sqrt{\alpha}\,\pi$, on aura

$$\cot q + \coth q = \frac{2m}{M} \cdot \frac{q^3}{q^4 + Kl^4/EI}$$ où $m = 2\mu l$ est la masse totale de la poutre.

Il est aisé de montrer que cette solution vérifie les conditions aux limites:

$$y'(0) = y'(2l) = y'''(0) = y'''(2l) = 0.$$

Ce sont celles d'une poutre que nous appellerons guidée-encastrée, représentée schématiquement sur la Figure 2 (page 14); de telles conditions sont réalisées physiquement dans quelques problèmes de mécanique: pont

roulant, cage d'ascenseur, rails de roulement. Cet exemple illustre bien le cas de résolution: m = p = 0. Nous n'avons pas fait intervenir de conditions aux limites pour résoudre le problème. Lorsque la poutre ne repose pas sur fondation élastique et que la charge est nulle, les solutions de cette équation sont $q = n\pi$ et les fréquences propres deviennent:

$$N = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n^2\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Supposons la masse très grande: coth q + cot q = 0; si en outre q est grand ($q \gg 4$), cot q tend vers -1 et les solutions sont alors:

$$q = (4n + 3)\frac{\pi}{4}$$

Ces résultats ont été vérifiés expérimentalement par C. Gazahnes, qui a pu réaliser pratiquement ces conditions aux limites particulières

B. - UNE MASSE FICTIVE.

C'est le cas de résolution qui a le plus d'applications pratiques Nous pourrons traiter la poutre sur appuis, encastrée-guidée et libre. Soit une poutre de longueur totale 2 l soumise à une masse M à l'abscisse X (Fig. 3)

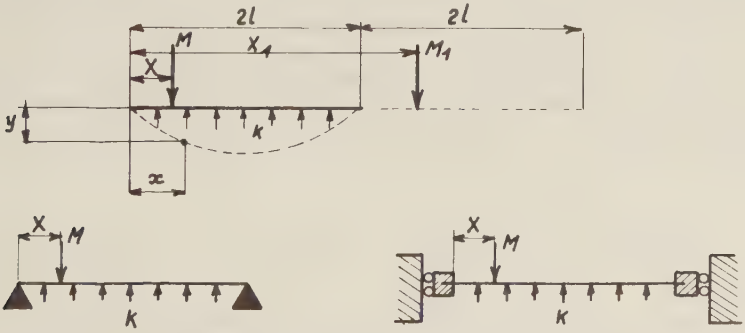


Figure 3.

Supposons qu'une masse fictive M_1 agisse à l'abscisse X_1 ($X_1 > 2l$, $\bar{\xi}_1 > \pi$).

Les équations (5) sont valables et nous nous référerons à celles-ci sans le mentionner quand cela sera nécessaire dans la suite de cet exposé. Si l'on passe aux fonctions circulaires, et que l'on change quelques notations définissant les constantes A_j, on démontre, en se référant à (9) et (10) que:

$$b_s = \frac{-(\sigma A - i\sigma B)\cos s\bar{\xi} + (\sigma A + \sigma B)\sin s\bar{\xi} + (i\sigma_1 D - \sigma_1 C)\cos s\bar{\xi}_1 + (\sigma_1 D + i\sigma_1 C)\sin s\bar{\xi}_1}{s^4 - \alpha^2} \quad (14)$$

avec les coefficients A, B, C, D définis par

$$A = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s \cos s\bar{\xi} \quad , \quad B = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s \sin s\bar{\xi} \quad , \quad C = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s \cos s\bar{\xi}_1 \quad , \quad D = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s \sin s\bar{\xi}_1$$

En utilisant les notations S(X), T(X), R, Q, du tableau 1 (p. 15), et en ne perdant pas de vue que les sommations en sinus sont nulles car s est pris de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient les conditions d'identification :

$$\begin{aligned} A &= S(X)\,(-\sigma A + i\sigma B) + R(i\sigma_1 D - \sigma_1 C), \\ B &= T(X)\,(\sigma B + i\sigma A) + Q(\sigma_1 D + i\sigma_1 C), \\ C &= R\,(i\sigma B - \sigma A) + S(X_1)(i\sigma_1 D - \sigma C), \\ D &= Q\,(\sigma B + \sigma A) + T(X_1)(\sigma_1 D + \sigma_1 C), \end{aligned} \quad (15)$$

Nous sommes dans le cas le plus général de résolution du système avec une charge fictive M_1 à une abscisse X_1. Sans symétrie, il nous faudrait donc en principe deux conditions aux limites distinctes. Mais la forme de b_s permet de prévoir que la solution y(x) pourra se présenter comme une suite de fonctions sinusoïdales qui ont la propriété d'être identiques à leur dérivée seconde. Nous pourrons donc traiter ces problèmes particuliers (la dérivée seconde de la solution est de la forme de la solution) en nous donnant σ_1, et en déterminant X_1 (ou inversement) choisir par exemple $X_1 = 4l - X$, donne $f(X_1) = f(2s\pi - s\bar{X}_1)$ et il s'en suit que A = C et B = -D.
Le système 15 se réduit alors à

$$\begin{aligned} A &= S(X)\;\; A\,(-\sigma - \sigma_1) + B\,(i\sigma - i\sigma_1) \\ B &= T(X)\;\; A\,(i\sigma - i\sigma_1) + B(\sigma + \sigma_1) \end{aligned} \quad (15)'$$

Le cas de la poutre sur appuis, ou encastrée-guidée rentre bien dans ce genre de problème: fonction , dérivée seconde de la fonction pour l'une, et pente, effort tranchant pour l'autre.

1. - POUTRE SUR APPUIS AUX EXTREMITES .

a) Cas d'une seule masse M

Le déplacement et le moment fléchissant doivent être nuls aux extrémités de la poutre: $y(0) = y(2l) = y''(0) = y''(2l) = 0$.

De telles conditions se résument en une seule:

$$N \left[A(-\sigma - \sigma_1) + i B(\sigma - \sigma_1) \right] = 0$$

en tenant compte de l'expression (14) de b_s et de ce que A=C, B=-D, ce qui entraine A=0 et $\sigma = \sigma_1$.

La seconde équation (15)' donne l'équation aux valeurs propres:

$$1 = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma \sin^2 s\bar{\xi}}{s^4 - \alpha^2} \qquad \bar{\xi} = \frac{\pi X}{2l} \qquad (17)$$

or, $\sin s\bar{\xi} = -\sin s\bar{\xi}_1$, et $\cos s\bar{\xi} = \cos s\bar{\xi}_1$, ce qui permettra de déterminer les coefficients b_s et par suite la solution:

$$y = \sigma B \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin s\bar{\xi}}{s^4 - \alpha^2} e^{is\xi} \qquad (18)$$

L'équation (17) et l'expression (18) seront explicitées en utilisant les résultats du tableau 1:

$$y = \frac{\pi \sigma B}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left[\frac{\sin\sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi})}{\sin\sqrt{\alpha}\pi} \sin\sqrt{\alpha}\xi - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi})}{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\pi} \operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\xi \right] \qquad (18_a)$$

pour $0 < \xi < \pi X/2l \qquad 0 < \xi < \bar{\xi}$

et

$$y = \frac{\pi \sigma B}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left[\frac{\sin\sqrt{\alpha}\bar{\xi}}{\sin\sqrt{\alpha}\pi} \sin\sqrt{\alpha}(\pi - \xi) - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\bar{\xi}}{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\pi} \operatorname{sh}\sqrt{\alpha}(\pi - \xi) \right]$$

pour $\pi X/2l < \xi < \pi \qquad \bar{\xi} < \xi < \pi$

L'équation aux valeurs propres (17) devient:

$$-\frac{1}{\sigma} = \frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left[\frac{\sin\sqrt{\alpha}\,\bar{\xi}}{\sin\sqrt{\alpha}\,\pi} \sin\sqrt{\alpha}\,(\pi-\bar{\xi}) - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\,\bar{\xi}}{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\,\pi} \operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\,(\pi-\bar{\xi}) \right] \qquad (17_a)$$

Cas particuliers:

1°) Masse au milieu de la poutre: $X = l$:

$$y = \frac{\pi\sigma B}{4\alpha\sqrt{\alpha}} \left[\frac{\sin\sqrt{\alpha}\,\xi}{\cos\sqrt{\alpha}\,\frac{\pi}{2}} - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\,\xi}{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\,\frac{\pi}{2}} \right] \qquad (18_b)$$

pour $0 < \xi < \pi/2$

et

$$y = \frac{\pi\sigma B}{4\alpha\sqrt{\alpha}} \left[\frac{\sin\sqrt{\alpha}\,(\pi-\xi)}{\cos\sqrt{\alpha}\,\frac{\pi}{2}} - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\,(\pi-\xi)}{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\,\frac{\pi}{2}} \right]$$

pour $\pi/2 < \xi < \pi$

L'équation aux valeurs propres est

$$\left[\operatorname{tg}\sqrt{\alpha}\,\frac{\pi}{2} - \operatorname{th}\sqrt{\alpha}\,\frac{\pi}{2} \right] \frac{\pi}{4\alpha\sqrt{\alpha}} = -\frac{1}{\sigma} = \frac{\pi^4 E I}{\omega^2 M (2l)^3} \qquad (17_b)$$

Si la poutre ne repose pas sur une fondation élastique(k=0), les fréquences propres seront données par: (5)

$$N = \frac{\pi\alpha}{8l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

et l'équation aux valeurs propres, en posant $q = \sqrt{\alpha}\,\pi/2$ devient

$$\operatorname{th} q - \operatorname{tg} q = \frac{2m}{Mq} \qquad \text{avec} \quad m = 2\mu l$$

Résultats obtenus par v. Karman et A. Biot [3] par la méthode classique de la résistance des matériaux.

2°) Masse à l'extrémité de la poutre: $X = 2l$; la solution s'écrit:

$$y = \frac{\pi \sigma B}{4\alpha\sqrt{\alpha}} \left(\sin\sqrt{\alpha}\,\xi - \operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\,\xi\right)$$

3°) Masse nulle; le premier membre de (17_a) est infini, ce qui entraine $\sin\sqrt{\alpha}\,\pi = 0$ où $\sqrt{\alpha} = p$, p nombre entier. Les fréquences propres [4] seront données par :

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu} + \frac{EI}{\mu l^4}\frac{(p\pi)^4}{16}}$$

c'est le résultat classique des fréquences propres d'une poutre sur fondation élastique avec appuis aux extrémités. Si k=0,

$$N = \frac{\pi p^2}{8l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

ce qui est en accord avec les théories existantes [5].

4°) Masse infinie. Le numérateur du deuxième membre de (18_a) est nul; les solutions de cette équation pourront être commodément obtenues par un procédé graphique.

Résultats graphiques.

Si on trace sur un même graphique les courbes représentatives de y_1 et y_2, définies par (17_a) après avoir posé $q = \sqrt{\alpha}\,\pi$, les abscisses des points d'intersection de ces courbes représentent les solutions de l'équation aux valeurs propres.

$$y_1 = \frac{4m}{M} \cdot \frac{q^3}{q^4 + (Kl^4/EI)}$$

$$y_2 = \frac{\sin q\,[1-(X/2l)]}{\sin q}\sin qX/2l - \frac{\operatorname{sh} q\,[1-(X/2l)]}{\operatorname{sh} q}\operatorname{sh} qX/2l$$

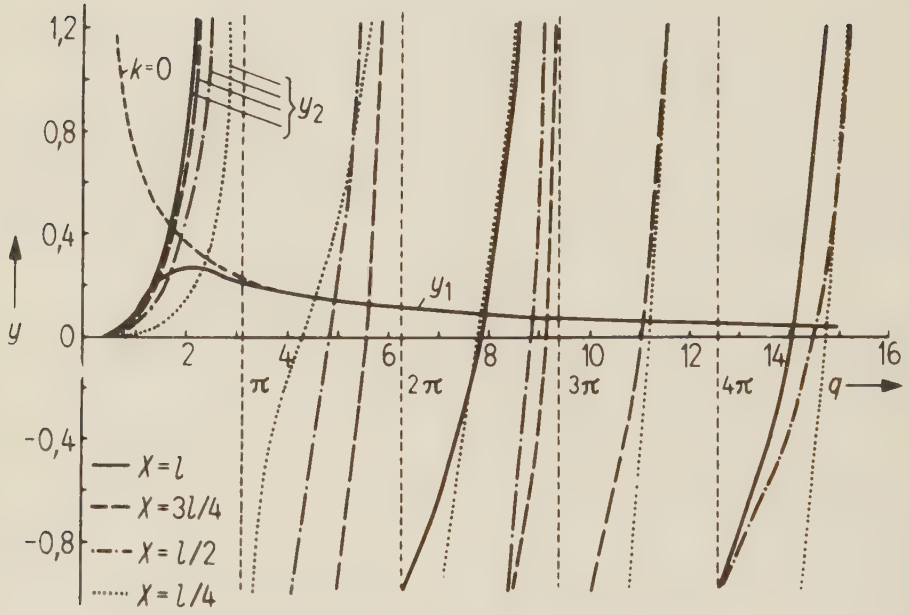

1,2
0,8
0,4
0
-0,4
-0,8
y
k=0
y_2
y_1
2
4
6
8
10
12
14
16
π
2π
3π
4π
q
X=l
X=3l/4
X=l/2
X=l/4

Fig. 4

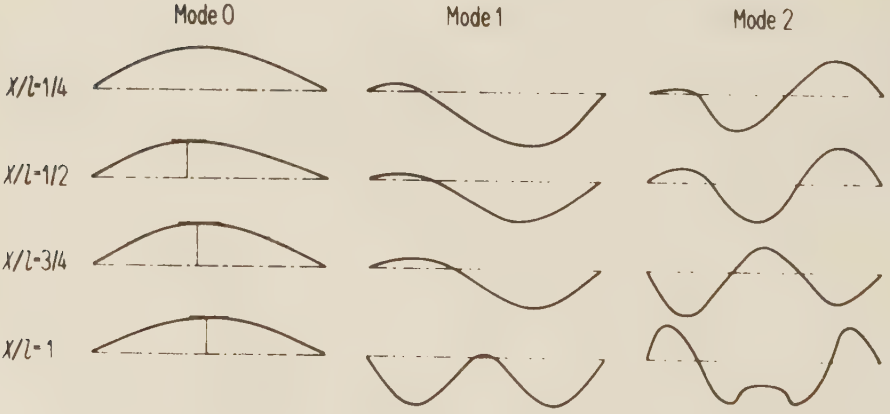

Mode 0
Mode 1
Mode 2
X/l=1/4
X/l=1/2
X/l=3/4
X/l=1

Fig. 5

Nous avons tracé ces courbes sur la figure 4 pour différentes valeurs de X/l : 1/4, 1/2, 3/4, 1. Les points de rencontre des courbes transcendantes avec l'axe des abscisses correspondent à une charge infinie, et les asymptotes de ces mêmes courbes à une charge nulle. Pour la masse infinie, les résultats sont les suivants:

1. $X/l = 1/4$, q=0; 4,3; 7,8; 11,2; 14,7;
2. $X/l = 1/2$, q=0; 4,9; 8,8; 14,5;
3. $X/l = 3/4$, q=0; 5,6; 9,1; 11;
4. $X/l = 1$, q=0; 7,8; 14,1;

D'une manière générale, la masse ramène les fréquences propres vers les graves et à mesure qu'elle se déplace vers le milieu de la poutre, les fréquences propres sont plus aigües. Nous avons également tracé sur la figure 5 les trois premiers modes de vibration, conformément à l'expression (18_a). Pour lepremier mode, la déformée devient symétrique par rapport à un axe passant par le milieu de la poutre. Pour le second mode, le nœudse déplace dans la même direction que la masse et finit par se dédoubler lorsque la masse est au milieu de la poutre. Pour le troisième mode le nœud, situé dans la moitié de la poutre qui supporte la masse, se déplace dans la même direction que la masse, alors que l'autre nœud va en sens contraire. Notons enfin que, même dans le cas $X/l = 1$, qui présente une symétrie, les courbes obtenues n'ont pas l'allure habituelle des fonctions sinusoïdales classiques des déformées de vibrations de poutres qui ne présentent pas de discontinuité de masse.

b) Cas de deux masses.

Soient deux masses M_1, M_2 agissant respectivement aux abscisses X_1, X_2 (Fig. 6).

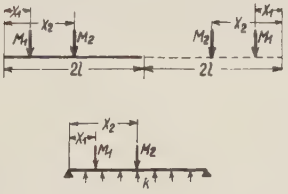


Figure 6.

En prenant, conformément à ce que nous avons trouvé dans le paragraphe précédent, des charges fictives de même intensité que les charges réelles et situées symétriquement par rapport à une extrémité de la poutre réelle, on déterminera b_s:

$$b_s (s^4 - \alpha^2) = -\sigma_1 A \cos s\bar{\xi}_1 + \sigma_1 B \sin s\bar{\xi}_1 - \sigma_2 C \cos s\bar{\xi}_2 + \sigma_2 D \sin s\bar{\xi}_2$$

Les quatre constantes A, B, C, D donnent lieu à quatre conditions identiques. Les conditions aux limites de la poutre sur appui entrainent :

$A = C = 0$ et il reste les deux conditions identiques:

$$B\left[1 - \sigma_1 T(X_1)\right] - \sigma_2 D R = 0$$

$$D\left[1 - \sigma_2 T(X_2)\right] - \sigma_1 B R = 0$$

Le déterminant de ces deux équations nous donne l'équation aux valeurs propres:

$$\left[1 - \sigma_1 T(X_1)\right]\left[1 - \sigma_2 T(X_2)\right] - \sigma_1 \sigma_2 R^2 = 0.$$

Nous n'avons pas explicité ce résultat, mais, si on le désire, on utilisera à cet effet les expressions des sommations du tableau I de la page 15. Notons que si σ_1, ou σ_2 s'annullent, nous retrouvons bien l'expression (17) relative à une seule masse.

2. POUTRE ENCASTREE-GUIDEE.

Les expressions (15') sont encore valables puisque les conditions aux limites d'une telle poutre sont: $y'(0) = y'''(0) = y'(2l) = y'''(2l) = 0$, c'est à dire se réduisent à une seule. Nous aurons toujours A=C et B=-D, $X_1 = 4l - X$, et en tenant compte de b_s (14), cette condition limite s'écrira:

$$K(X)\left[B(\sigma + \sigma_1) + i A(\sigma - \sigma_1)\right] = 0 \qquad \text{où: } K(x) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{s \sin s\bar{\xi}}{s^4 - \alpha^2}$$

ce qui entraine d'après (15') B=0, et l'équation aux valeurs propres:

$$1 + \sigma S(X) = 0, \quad \text{soit: } 1 + \sigma \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 s\bar{\xi}}{s^4 - \alpha^2} = 0 \qquad (19)$$

En utilisant les résultats du tableau I, il vient:

$$y = \frac{\pi \sigma A}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left[\frac{\cos\sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi})}{\sin\sqrt{\alpha}\pi} \cos\sqrt{\alpha}\xi + \frac{\mathrm{ch}\sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi})}{\mathrm{sh}\sqrt{\alpha}\pi} \mathrm{ch}\sqrt{\alpha}\xi \right] \qquad (20)$$

pour $0 < \xi < \bar{\xi}$

et

$$y = \frac{\pi \sigma A}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left[\frac{\cos\sqrt{\alpha}\bar{\xi}}{\sin\sqrt{\alpha}\pi} \cos\sqrt{\alpha}(\pi - \xi) + \frac{\mathrm{ch}\sqrt{\alpha}\bar{\xi}}{\mathrm{sh}\sqrt{\alpha}\pi} \mathrm{ch}\sqrt{\alpha}(\pi - \xi) \right]$$

pour $\bar{\xi} < \xi < \pi$

L'équation aux valeurs propres est alors:

$$\frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\pi\sigma} = \frac{\cos\sqrt{\alpha}\bar{\xi}}{\sin\sqrt{\alpha}\pi} \cos\sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi}) + \frac{\mathrm{ch}\sqrt{\alpha}\bar{\xi}}{\mathrm{sh}\sqrt{\alpha}\pi} \mathrm{ch}\sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi}) \qquad (21)$$

Nous n'avons pas jugé utile de passer en revue tous les cas particuliers, la discussion étant semblable à celle que nous venons de faire pour la poutre appuyée. Notons cependant que si $X = l$, les équations (21) deviennent, en posant $q = \sqrt{\alpha}\pi/2$:

$$\mathrm{cotg}\, q + \coth q = \frac{2m}{M} \cdot \frac{q^3}{q^4 + Kl^4/EI}$$

c'est un résultat que nous avions trouvé dans le paragraphe précédent (II. A), sans faire intervenir de masse fictive. Il est vraisemblable que la poutre sur appuis chargée en son milieu peut être traitée également sans masse fictive.

Nous venons de voir un cas particulier de m=1. Rappelons en effet que nous nous sommesdonné l'abscisse de celle-ci et nous avons ensuite déterminé l'intensité de façon à réaliser les conditions aux limites désirées. Dans le cas où les deux conditions aux limites sont distinctes, il faudra déterminer l'intensité σ_1, et l'abscisse (X_1) pour satisfaire à ces conditions.

Ce sera ainsi le problème général de balayage appliqué à un domaine unidimensionnel, que nous allons illustrer en étudiant les vibrations d'une poutre libre chargée en son milieu.

3. - POUTRE LIBRE.

Nous prenons le cas d'une poutre libre, reposant sur fondation élastique, chargée en son milieu, lequel est pris comme origine des abscisses. Soient M et M_1, les masses réelles et fictives aux abscisses x=0, et $x=X_1$ (Fig. 7).

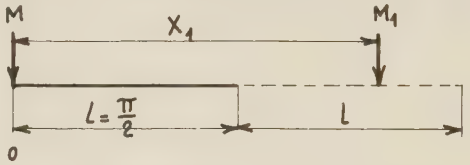


Figure 7.

Les équations (8) et (9) conduisent à:

$$b_s = \frac{\sigma A}{s^4 - \alpha^2} - \frac{\sigma_1 A_1 \cos s\bar{\xi}_1}{s^4 - \alpha^2}$$

avec

$$A = -\sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s \qquad \text{et} \qquad A_1 = -\sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s \cos s\bar{\xi}_1 \qquad \text{et } y = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s \cos s\xi$$

Les équations d'identification (11) définissent les A et s'obtiendront en multipliant b_s par 1, puis par $\cos s\bar{\xi}_1$, et en sommant termes à termes:

$$A(1 + \sigma S) + \sigma_1 A_1 N = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$A_1(1 + \sigma_1 S(X)) + \sigma A N = 0 \qquad \text{(b)} \qquad (22)$$

en utilisant les expressions des sommes S, S(X), N utilisées dans le tableau I.

Les conditions aux limites d'une poutre libre sont telles que le moment fléchissant et l'effort tranchant sont nuls à l'extrémité de la poutre ($x = l$, $\xi = \pi/2$). Nous aurons donc deux conditions aux limites simples:

$$\begin{aligned} A Z + \Phi A_1 &= 0 \qquad (c) \\ A X + \Theta A_1 &= 0 \qquad (d) \end{aligned} \tag{22}$$

en posant:

$$\Phi = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{s^2 \cos s\bar{\xi}_1 . \cos s\pi/2}{s^4 - \alpha^2} = \left[\frac{\cos \sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi}_1)}{\sin \sqrt{\alpha}\pi/2} - \frac{ch \sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi}_1)}{sh \sqrt{\alpha}\pi/2} \right] \frac{\pi}{4\sqrt{\alpha}}$$

et :

$$\Theta = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{s^3 \cos s\bar{\xi}_1 . \sin s\pi/2}{s^4 - \alpha^2} = \left[\frac{\cos \sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi}_1)}{\cos \sqrt{\alpha}\pi/2} - \frac{ch \sqrt{\alpha}\pi(1 - \bar{\xi}_1)}{ch \sqrt{\alpha}\pi/2} \right] \frac{\pi}{4}$$

Les quatre équations (22) permettent de déterminer les quatre inconnues du problème: X_1, σ_1, σ, A_1; par exemple, le déterminant des (c) et (d) donnera $F(X_1, \alpha) = 0$; connaissant X_1, (b) et (d) détermineront et (a) et (c) conduiront à l'équation aux valeurs propres.

En nous aidant du tableau I qui donne la valeur des sommes Z et X, nous avons pu calculer Φ et Θ; on trouve:

$$\frac{\cos \sqrt{\alpha}\pi/2 \; sh \sqrt{\alpha}\pi/2 + sh \sqrt{\alpha}\pi - \sin \sqrt{\alpha}\pi/2 \; ch \sqrt{\alpha}\pi/2}{\sin \sqrt{\alpha}\pi/2 \; ch \sqrt{\alpha}\pi/2 + \sin \sqrt{\alpha}\pi - sh \sqrt{\alpha}\pi/2 . \cos \sqrt{\alpha}\pi/2} = \frac{ch \sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi}_1)}{\cos \sqrt{\alpha}(\pi - \bar{\xi}_1)} \tag{23}$$

d'après

$$Z\Theta - \Phi X = 0$$

(a) et (c) donnent $\sigma = \dfrac{\Phi}{ZN - \Phi S}$

Le calcul , bien que long, ne présente aucune difficulté. A l'aide de (23) on trouve:

$$ZN - \Phi S = \frac{\left[ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}+1\right]\left[\sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}-sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\right]}{ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}-sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}+\sin\sqrt{\alpha}\pi} X - \left[\frac{\pi^2\cos\sqrt{\alpha}(\pi-\bar{\xi}_1)}{4\alpha^2 sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}}\right]$$

et comme

$$\Phi = \frac{\left[ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}+sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\right]\cos\sqrt{\alpha}(\pi-\bar{\xi}_1)}{ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}-sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}+\sin\sqrt{\alpha}\pi} \cdot \frac{sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}-\sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}}{4\sqrt{\alpha}\, sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}}$$

l'équation aux valeurs propres s'écrit:

$$\sigma = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\pi} \frac{ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}+\cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}}{\cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}+1} \qquad (24)$$

Pour obtenir le solution $y(\xi)$, [6] on remplacera $\sigma_1 A_1$ par $-\sigma A Z/\Phi$, et on éliminera X_1 par (23) quand on effectuera la sommation des b_s. Nous n'avons pas fait ce calcul, car la solution pourra être déterminée, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant (II. C. 1), par l'utilisation de deux masses fictives. Nous aurions pu traiter dela même façon la poutre encastrée, chargée en son milieu où les conditions aux limites $y''(l)=y'''(l)=0$ auraient été remplacées par $y'(l) = y''(l) = 0$. Cependant, il semble plus simple de prendre deux masses fictives, dont on pourra choisir judicieusement la position de façon à faciliter le calcul pour remplir les conditions aux limites imposées.

C. - DEUX MASSES FICTIVES.

Pour simplifier, nous prendrons comme exemple des poutres chargées en leur milieu; l'origine des abscisses sera pour des raisons de symétrie le milieu de la poutre; on peut également,pour ces mêmes raisons, prévoir les abscisses des charges fictives comme l'indique la figure 8, c'est à dire, une masse fictive en $X = l$, soit $\xi = \pi/2$, et une autre masse fictive en $X = 2l$, soit $\xi = \pi$.

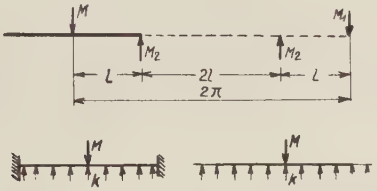


Figure 8

Ce choix, permettant d'annuler les sommes en sinus, n'est pas du tout impératif; nous montrerons plus tard que l'on peut traiter le problème sans se donner les abscisses des masses fictives. Quoiqu'il en soit, le résultat $X_1 = 4l - X$, que nous avions obtenu pour les cas précédemment étudiés, nous incite à faire ce choix.

En se reportant au paragraphe II. B. 3, les coefficients b_s seront déterminés à l'aide des équations (8) et (9):

$$b_s (s^4 - \alpha^2) = -\sigma A - \sigma_1 B \cos s\pi + \sigma_2 C \cos s\pi/2 \quad \text{avec}$$

$$A = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s \qquad B = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s \cos s\pi \qquad C = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s \cos s\pi/2$$

Les conditions d'identification seront donc au nombre de trois:

$$\begin{aligned} A(1+\sigma S) + B\sigma_1 T \qquad & -\sigma_2 C U \qquad = 0 \\ A\sigma T \qquad & +(1-\sigma_1 S)B + \sigma_2 C U \qquad = 0 \\ A\sigma U \qquad & + B\sigma_1 U \qquad + C(1-\sigma_2 V) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Il faudra adjoindre les deux conditions aux limites.

1. - POUTRE LIBRE.

Reprenons l'exemple de la poutre libre qui vient d'être traitée par intervention d'une seule masse fictive. Nous insisterons particulièrement sur ce cas à cause de son originalité, et nous ferons suivre l'étude théorique de vérifications expérimentales. Les conditions aux limites(effort tranchant, moment fléchissant nuls) donnent deux équations:

$$\begin{aligned} X(\sigma A - \sigma_1 B) &= \sigma_2 C Y, \\ Z(\sigma A + \sigma_1 B) &= \sigma_2 C W \end{aligned} \tag{26}$$

en tenant compte de ce que:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{s^2 \cos s\pi/2 \cos s\pi}{s^4 - \alpha^2} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{s^2 \cos s\pi/2}{s^4 - \alpha^2}$$

$$\sum_{s=-\infty} \frac{s^3 \sin s\pi/2 \cos s\pi}{s^4 - \alpha^2} = -\sum_{s=-\infty} \frac{s^3 \sin s\pi/2}{s^4 - \alpha^2}$$

et en utilisant toujours les notations du tableau I de la page 15. De ces deux équations on peut tirer deux constantes en fonction de la troisième et reporter leurs valeurs dans les équations (25) pour déterminer les masses. Les masses fictives σ_1, σ_2 sont deux instruments mathématiques qui ne servent qu'à résoudre le problème; seul σ nous intéresse. On tirera par exemple B et C en fonction de A, et en reportant dans la première équation (25), on déterminera l'équation aux valeurs propres 6 :

$$\sigma = -\left[\frac{W}{Z} - \frac{Y}{X}\right] \left[\frac{1}{(S+T)\frac{W}{Z} + (S-T)\frac{Y}{X} - 2U}\right] \ldots$$

Le calcul est assez long, mais ne présente aucune difficulté; on trouve:

$$\sigma = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\pi} \quad \frac{ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\ \sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2} + sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}}{ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2} + 1} \qquad (27)$$

qui est bien l'équation (24) trouvée précédemment par la méthode de masse fictive unique. Les fonctions propres ne dépendront que d'une constante multiplicative A par exemple. Si $q = \sqrt{\alpha}\,\pi/2$, on trouve:

$$y = \frac{\pi\sigma A}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \frac{chq\cos q - shq\sin q + 1}{shq\cos q + chq\sin q}\cos q\frac{x}{l} + \frac{chq\cos q + shq\sin q + 1}{chq\sin q + shq\cos q}chq\frac{x}{l} + \sin q\frac{x}{l} - shq\frac{x}{l} \qquad (28)$$

$$\sigma = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\pi} \quad \frac{chq\sin q + shq\cos q}{chq\cos q + 1}$$

La détermination de y est plus facile que dans le problème précédent, car il n'y a pas de terme en X_1 à éliminer. On ne fera qu'utiliser à cet effet les relations entre σ_1 B, σ_2 C et σ A, qui sont simples:

$$\sigma A = \frac{\sigma_2 C}{2}\left[\frac{Y}{X} + \frac{W}{Z}\right] \qquad \sigma A\left[\frac{W}{Z} - \frac{Y}{X}\right] = \sigma B\left[\frac{W}{Z} + \frac{Y}{X}\right]$$

Notons enfin que nous avons ici seulement les vibrations symétriques. Dans le cas où la masse M tend vers 0 les vibrations antisymétriques ne pourront être retrouvées.

Nous avons résolu l'équation (27) graphiquement (Fig. 9) et nous avons tracé les trois premiers modes de vibrations (Fig. 10). Pour une masse nulle, les valeurs propres (abscisses des asymptotes des courbes transcendantes) sont: 0; 2,36; 5,5; 8,6; 11,8; 15.... etc, soit 0; $3\pi/4$; $7\pi/4$; $11\pi/4$; $15\pi/4$; $19\pi/4$..... correspondant aux solutions de l'équation transcendante suivante: tg q + th q = 0. Cette équation est bien l'équation aux valeurs propres d'une poutre non chargée reposant sur fondations élastiques. Notre étude cadre donc bien dans son cas limite avec les résultats connus [3] [5] [7] [8].

....

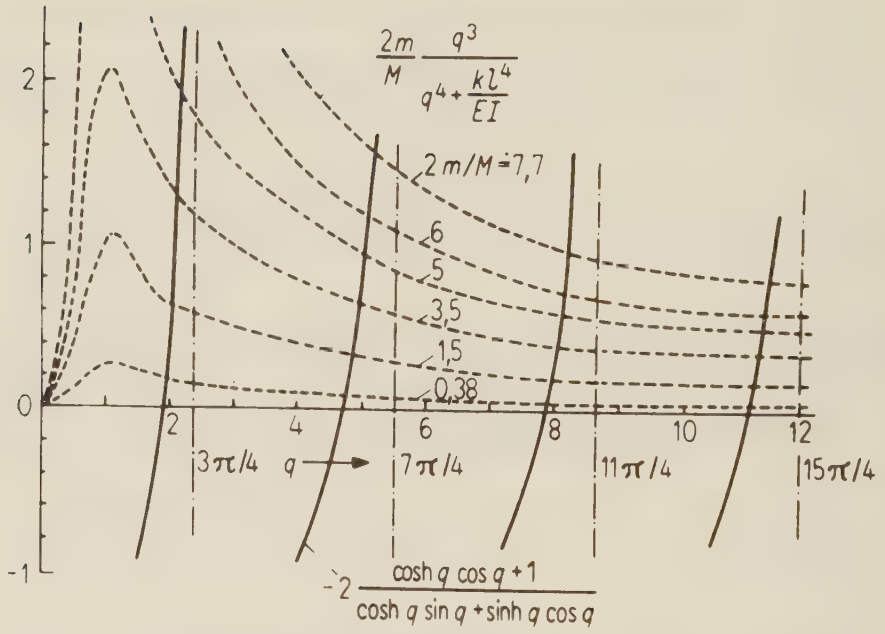

$\frac{2m}{M}\frac{q^3}{q^4+\frac{kl^4}{EI}}$
2 m/M = 7,7
6
5
3,5
1,5
0,38
2
1
0
-1
2
4
6
8
10
12
3π/4
q
7π/4
11π/4
15π/4
$-2\frac{\cosh q \cos q + 1}{\cosh q \sin q + \sinh q \cos q}$

Fig. 9

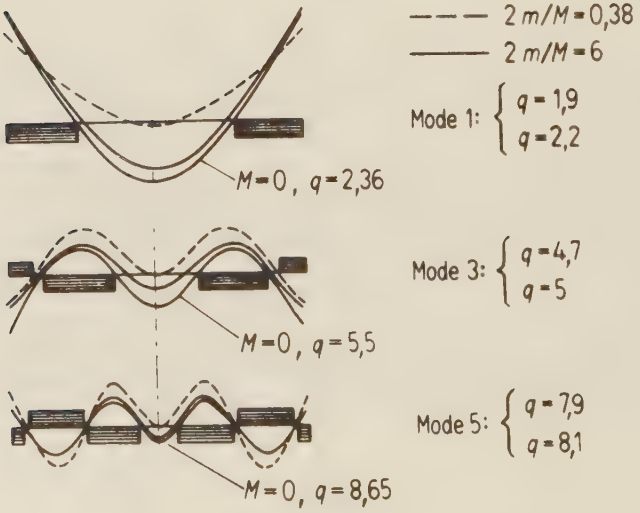

2 m/M = 0,38
2 m/M = 6
Mode 1: q = 1,9 ; q = 2,2
M = 0, q = 2,36
Mode 3: q = 4,7 ; q = 5
M = 0, q = 5,5
Mode 5: q = 7,9 ; q = 8,1
M = 0, q = 8,65

Fig. 10

Dans le cas où la masse est très grande ($\sigma = \infty$), les solutions de l'équation aux valeurs propres sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des x, soit 1, 88; 4, 7; 7, 85; 11; 14, 15; 17, 3;... etc ou encore $3\pi/2$; $5\pi/2$; $7\pi/2$; $9\pi/2$; $11\pi/2$. On voit donc que les valeurs propres, par suite les fréquences propres sont décalées vers les graves et passent de $(2n + 1)\pi/4$ à $n\pi/2$, n prenant les valeurs successives 3, 5, 7, 9, 11... etc. lorsque la masse croît de 0 à l'infini. Pour le premier mode, le fondamental n'atteint pas la valeur correspondant à n = 1, soit $\pi/2$. On voit que les courbes suivent de très près leurs asymptotes; il s'ensuit qu'une faible masse entraîne un décalage des fréquences vers les graves et que, à partir du moment où la charge additionnelle est environ six fois plus grande que la masse totale de la poutre, les fréquences propres sont déjà confondues avec celles de la poutre chargée à l'infini. Le phénomène est donc très brusque.

D'autre part, la charge entraîne un décalage des noeuds vers le milieu de la poutre, qui est moins important pour les modes aigûs que pour les modes graves.

Pour le premier mode de vibration symétrique, le nœud se déplace d'une quantité peu différente de $\ell/2$. Le premier nœud du second mode symétrique est déplacé de $\ell/3$ vers le milieu de la poutre tandis que le second l'est de $\ell/10$ vers l'extrémité de la poutre; enfin, pour le mode suivant, le décalage est $\ell/9$ pour le premier nœud, presque nul pour le second et le troisième. On peut donc considérer que lorsque 2m/M a pris la valeur de 0, 3 la charge est infiniment grande.

2. POUTRE ENCASTREE.

Aux équations (25) il faut adjoindre les deux conditions aux limites d'un encastrement: $y(l) = y'(l) = 0$:

$$\sigma A = \sigma_1 B, \qquad \sigma A + \sigma_1 B = \sigma_2 CV \tag{29}$$

en tenant compte de ce que:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \cos s\pi \cos s\pi/2 = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \cos s\pi/2 \qquad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sin s\pi = 0$$

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \cos s\pi \sin s\pi/2 = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} -\sin s\pi/2$$

on peut donc tirer $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$, de ces cinq équations (25) et (29) ; en utilisant les résultats du Tableau I, on obtient l'équation aux valeurs propres:

$$\sigma = \frac{V}{2(U^2 - V^2)} = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\pi} \frac{ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2} \sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2} + sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2} \cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}}{ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2} \cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2} - 1} \tag{30}$$

Les fonctions propres dépendront d'une constante multiplicative:

$$y = \frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\sigma\pi A} \frac{chq\cos q - shq\sin q - 1}{shq\cos q + chq\sin q} \cos q\frac{x}{l} + \frac{chq\cos q + shq\sin q - 1}{shq\cos q + chq\sin q} chq\frac{x}{l} + \sin q\frac{x}{l} - sh\,q\frac{x}{l} \tag{31}$$

$$\sigma = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\pi} \cdot \frac{chq\sin q + shq\cos q}{chq\cos q - 1}$$

Cas particuliers

1°) Pas de masse: M=0; le numérateur du second membre de (30) s'annule, ce qui est l'équation aux valeurs propres des vibrations symétriques d'une poutre encastrée, identique par ailleurs à celle d'une poutre libre [8].

2°) Masse très grande; M tend vers l'infini; le dénominateur du second membre de (30) s'annule et pour q grand ($q \gg 4$) les solutions seront: $q = \pi/2(2n + 1)$, $\cos q = 0$

Nous n'avons pas tracé les courbes transcendantes nécessaires à la résolution graphique de l'équation aux valeurs propres (30), ni les déformées de la poutre, pour chaque mode de vibration, conformément à (29). En ce qui nous concerne, l'intérêt de la poutre encastrée, réside essentiellement dans le fait qu'elle peut être traitée par les méthodes de masses fictives dans les mêmes conditions que la poutre libre.

Remarque:

Comme nous l'avons dit précédemment, il est possible de résoudre ces deux problèmes (vibration de la poutre libre ou encastrée surchargée en son milieu) en utilisant deux masses fictives d'intensité σ_1 et σ_2 données, dont on déterminera les abscisses X_1 et X_2 de manière à remplir les conditions aux limites. Nous n'expliciterons pas ici le calcul, mais il résulte de ce dernier que l'élimination des X_1 et X_2 est relativement simple car elle se présente sous la forme d'une fonction : $F(X_1, X_2) = f(\alpha)$, qui apparaît dans l'équation aux valeurs propres: =

$$\sigma = F(X_1, X_2)\, g(\alpha). \qquad F(X_1, X_2) = f(\alpha) \text{ résulte de}$$

$$F_1(X_1, X_2, \alpha) = 0 \quad \text{et de} \quad F_2(X_1, X_2, \alpha) = 0$$

Il n'est pas nécessaire de tirer X_1 et X_2 de ces deux équations pour déterminer la solution.

Cependant, il n'en est pas toujours ainsi, et d'une façon générale, la connaissance des abscisses et la détermination des intensités des masses fictives sera une méthode plus élégante; en effet, elle revient à la résolution d'équations algébriques, alors que la détermination des abscisses fait appel à des équations transcendantes. C'est la raison pour laquelle nous avons utilisé cette méthode pour traiter la poutre encastrée qui entre évidemment dans le cadre des deux méthodes de résolution.

D. - VERIFICATION EXPERIMENTALE.

Nous avons tenu à comparer les résultats théoriques originaux déduits de cette méthode de balayage avec ceux obtenus expérimentalement. Nous n'insisterons pas sur le procédé de recherche des fréquences propres que la technique habituelle a mis à notre disposition avec l'aide des excitateurs, capteurs de vibrations, fréquencemètres. Nous avons pris deux exemples caractéristiques: la poutre libre chargée en son milieu, et la poutre appuyée dont on a fait varier la position de la masse. Ces deux exemples illustrent bien le développement de la méthode théorique que nous avons particulièrement poussée lorsque l'on a abordé ces sujets.

L'étude expérimentale a été réalisée à l'aide d'une poutre à section rectangulaire en duralumin reposant sur un matelas de caoutchouc très souple. Le module d'Young, le coefficient k ont été déterminés par des procédés acoustiques. La poutre de duralumin était fixée dans son milieu par deux couteaux parallèles et excitée longitudinalement. La connaissance de la fréquence de résonance conduit au module d'élasticité. En faisant vibrer sur du caoutchouc une masse M (dont la fréquence propre est assez élevée) on détermine la fréquence propre de l'ensemble; la connaissance de cette fréquence nous donne la constante élastique du caoutchouc conformément à la formule:

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{\omega}{2\pi}$$

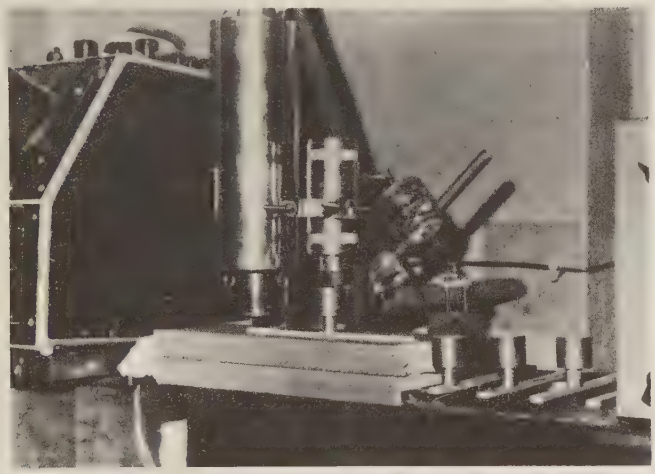
D'autre part, la constante élastique du caoutchouc a été déterminée par une méthode statique en partant de la définition même (rapport de la pression à l'enfoncement par unité de longueur). Les résultats obtenus par cette méthode se sont révélés légèrement plus faibles que par la méthode dynamique, ce qui est conforme à nos connaissances actuelles sur ce coefficient Toutefois, il y a lieu de n'employer dans les calculs que les valeurs déterminées par la méthode dynamique.

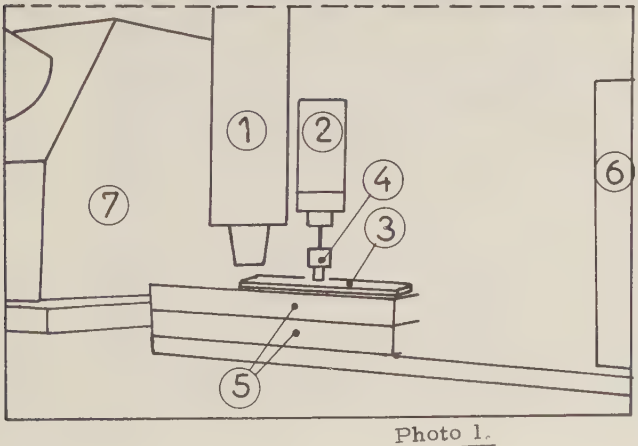
1. - POUTRE LIBRE (UNE SEULE MASSE AU MILIEU).

La poutre de duralumin avait les dimensions suivantes: longueur totale 20 cm. largeur 1cm, épaisseur 0,5 cm, $E=(8.750 \pm 8)$ kg/mm^2, $K=3,5 \times 10^5$ dynes/cm^3, m=1,58 g/cm. Le choix de ces grandeurs permet d'obtenir des fréquences propres très éloignées les unes des autres et d'éli-

miner ainsi toutes les causes d'erreur entraînées par le chevauchement de la suite des valeurs propres des modes symétriques et anti-symétriques. Enfin, nous avons fait une expérience avec des surcharges de 10g(2m/M=6) et de 155g(2m+M=0, 38) de façon à mettre en évidence le décalage des fréquences.

La poutre était excitée sinusoïdalement en son milieu par un excitateur électromagnétique Philips. La photo 1, schématisée par la figure ci-dessous, rend compte du dispositif utilisé.





1) Capteur,
2) Excitateur,
3) Poutre,
4) Masse,
5) Caoutchouc,
6) Hétérodyne,
7) Oscillographe.

Photo 1.

La fréquence de résonance était déterminée à l'aide d'un capteur électrostatique à capacité; le signal était recueilli sur l'écran d'un oscillographe cathodique (simple lecture visuelle); ou sur un enregistreur de niveau type Bruel et Kjaer. Pour obtenir avec précision la fréquence d'accord, on utilisait un compteur électronique type Rochar. Nous ne reproduisons pas les enregistrements obtenus par le batymètre. Les résultats définitifs, après avoir fait la moyenne de tous les enregistrements, sont donnés par le compteru électronique. Signalons que les capteurs type électromagnétique, ou piézoélectrique ne pouvaient convenir en raison de la surcharge constante qu'ils introduisaient; seul, le capteur à capacité variable, qui était constitué d'une petite plaque de laiton séparée de la poutre par un faible intervalle d'air, ne perturbait pas les mesures; en outre, il avait l'avantage d'obtenir un signal suffisant aux fréquences aigües malgré la faible énergie d'excitation à ces fréquences. Bien que le support de la poutre fût assez rigide (constitué par un bâti de tour mécanique), il était nécessaire d'isoler le capteur des vibrations parasites. La détermination des points nodaux a été executée soit à l'aide d'une plaquette composée de plusieurs lames de laiton disposées parallèlement à la poutre pour les fréquences aigües, soit tout simplement en utilisant du sable de Fontainebleau pour les graves.

Pour les fréquences graves, les fréquences propres sont données par:

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \text{ et } \frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta \mu}{\mu}\right)$$

Comme k a été obtenu par une méthode dynamique,la précision n'est donc due qu'à la lecture sur le compteur électronique (1/10 000). Il est certain que les causes d'erreurs dues à la finition de la poutre, à la position de la surcharge, au point d'excitation, aux vibrations parasites, sont bien supérieures à l'erreur ($\Delta N/N$) commise sur la fréquence.

Il en est de même pour les fréquences aigües où seul le terme $EIq^4/\mu l^4$ est prépondérant, mais où la détermination du module E a été déduite également de mesures de fréquences.

Enfin, tous ces résultats ne sont valables que si l'on suppose que la poutre ne décolle pas de la fondation élastique, cette hypothèse ne jouant d'ailleurs de rôle que dans le premier mode grave, puisque dans les aigües, $\mu\omega^2$ devenant grand devant k, la poutre tend à vibrer comme si elle ne reposait plus sur le caoutchouc. Pour cette raison, le choix du matériau élastique était importante, et pour les graves, nous avons utilisé une série de petits ressorts métalliques jointifs soudés à la poutre. Pour les fréquences aigües, nous avons utilisé le caoutchouc, car cet effet n'était plus gênant et par contre,

....

la fréquence propre des ressorts était voisine de celle qu'on cherchait. Les résultats mentionnés dans le tableau II sont en accord avec la théorie:

- TABLEAU II -

2m/M	Résultats théoriques	Résultats expérimentaux
6	N = 570 Hz noeud : 53 mm	N = 570 Hz 53 mm
	N = 2 910 Hz noeuds: 21 mm 82 mm	N = 2 900 Hz 20 mm 84 mm
0, 38	N = 428 Hz N = 2 600 Hz	N = 425 Hz N = 2 610 Hz

2. - POUTRE SUR APPUIS (MASSE VARIABLE).

La photographie 2 ci-dessous montre le dispositif adopté pour

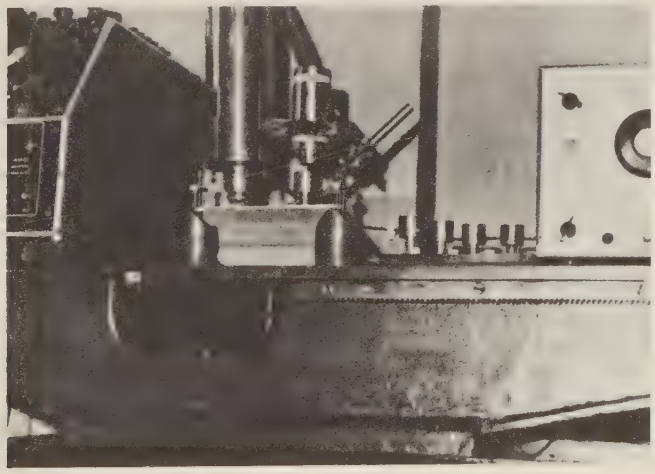


Photo 2

la fixation de la poutre sur ses supports, ainsi que les différentes masses constituées par de petits cylindres. Si, dans le cas statique, on arrive facilement à remplir ces conditions aux limites, il est beaucoup plus délicat d'obtenir le même résultat en régime dynamique. Pour immobiliser les extrémités, on risque d'obtenir des conditions voisines de celles de l'encastrement, et il y a lieu de faire la sélection des fréquences propres trouvées. L'excitation avait lieu également au milieu de la poutre et la recherche des fréquences propres s'effectuait par le même procédé que pour la poutre libre.

Le Tableau III rend compte des résultats obtenus. Nous avons pris des charges très grandes de façon à pouvoir les considérer comme infinies, ce qui donnait des valeurs propres théoriques bien définies (voir paragraphe II. B. 1). Ainsi, pour $X/\ell = 1/4$, nous avions les valeurs propres 4, 3; 7, 8; 11, 2. Le rapport de deux fréquences élevées consécutives est égal au carré du rapport de deux valeurs propres théoriques, soit par exemple: $(7,8/4,3)^2$.

- TABLEAU III -

Position de la masse	Fréquences mesurées.	Rapport des fréquences mesurées.	Rapport des fréquences théoriques.
$X = \ell/4$	630 1750 3740	2,8 2,13	3,3 2,07
$X = \ell/2$	700 2300	3,28	3,24
$X = 3\ell/4$	940 2480	2,64	2,65
$X = \ell$	1850 5900	3,2	3,25

Enfin, l'étude expérimentale complète de la poutre encastrée-guidée a fait l'objet d'un Diplôme d'Etudes Supérieures présenté le 10 juillet 1958, devant la Faculté des Sciences de Marseille, par C. Gazanhes, qui a pu vérifier expérimentalement la théorie que nous avons exposée ici.

E. - CONCLUSIONS.

Nous avons vu que la méthode de balayage par masses fictives a donné satisfaction dans les problèmes d'élasticité unidimensionnels. Nous retiendrons que, selon les conditions aux limites imposées il y a lieu de faire intervenir zéro, une ou deux masses fictives. En résumé:

1°) poutre chargée en son milieu sur appuis, ou encastrée-guidée: pas de masse fictive;

2°) poutre avec masse en un point quelconque sur appuis, ou encastrée-guidée, une masse fictive d'abscisse donnée et dont on détermine l'intensité;

3°) poutre avec masse en son milieu libre ou encastrée:

a) une masse fictive à déterminer complètement;
b) deux masses fictives dont on se donne l'une des caractéristiques et dont on déterminera l'autre.

4°) poutre avec masse en un point quelconque libre ou encastrée: deux masses fictives à déterminer complètement.

Il ressort que la résolution de la poutre encastrée ou libre est plus compliquée que les autres car les conditions aux limites sont bien distinctes.

D'autre part, la méthode permet de résoudre commodément les problèmes de statique: la pulsation propre ω devient nulle, $k - \omega^2\mu$ est positif, et il suffira, comme nous le verrons plus loin, de remplacer $\sqrt{\alpha}$ par $\sqrt{\alpha}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$ dans les résultats. Il est aisé de résoudre ainsi quelques problèmes traités par la méthode classique des moments [9].

Enfin, on peut généraliser en couplant des poutres deux à deux c'est ainsi que nous avons pu donner l'exemple des vibrations d'un portique reposant sur fondations élastiques, ce qui fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE III

ETUDE DYNAMIQUE D'UN PORTIQUE

En utilisant la méthode des masses fictives, nous sommes en mesure de traiter le problème des vibrations d'une poutre avec conditions aux limites quelconques, et en particulier celui du couplage de plusieurs poutres. La recherche des contraintes dynamiques et statiques de structures supportées par des piliers est un problème d'élasticité, relié étroitement à la mécanique des sols, qui ne manque pas d'intérêt pratique.

Le portique, constitué par une poutre horizontale et par deux béquilles verticales soumises à la pression du sol et reliées à la poutre supérieure par l'intermédiaire de goussets, est une de ces structures les plus simples. C'est sur cet exemple que nous avons porté notre attention, et nous verrons, plus loin, que sa résolution découle de tout ce qui a été dit précédemment.

Le modèle théorique d'un tel système est représenté par la figure 11 ci-après. Nous supposerons:

1°) la masse concentrée et appliquée au milieu de la poutre supérieure;
2°) le sol parfaitement élastique, défini par son coefficient de réaction $k = p/\rho$ (p étant la pression exercée, ρ l'enfoncement).

Pour simplifier, nous ne ferons pas de distinction entre le coefficient de réaction horizontal du sol et son coefficient vertical. D'ailleurs,

l'expérience menée parallèlement à cette étude a été réalisée en utilisant les mêmes plaques de caoutchouc aussi bien contre la poutre supérieure que contre les béquilles, pour le portique dit "reposant sur un sol élastique".

3°) les béquilles soumises aux seules contraintes exercées horizontalement par le sol.

La figure 11a met en évidence l'hypothèse et les quelques notations utilisées dans la suite du calcul.

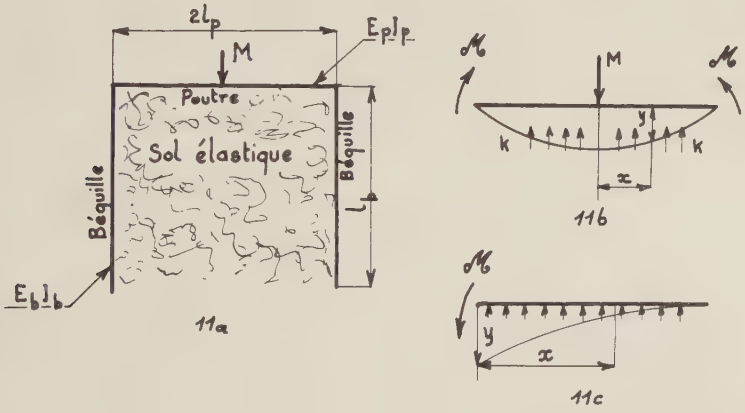


Figure 11.

Le couplage entre poutre et béquilles s'exprime par la condition d'égalité des moments fléchissants, et par celle de la conservation de l'angle droit aux deux raccordements; l'hypothèse qui consiste à considérer les poutres comme articulées ne présente pas d'intérêt théorique.

On a donc à étudier une poutre reposant sur une fondation élastique, soumise à deux moments fléchissants $\mathcal{M}$ à ses extrémités, et surchargée en son milieu par une masse concentrée M

....

Par raison de symétrie, l'origine des abscisses sera prise au milieu de la poutre (Fig. 11 b). La béquille n'est soumise à qu'à une seule de ses extrémités (Fig. 11 c). Enfin, les indices p et b se rapportent respectivement à la poutre et aux béquilles. Nous savons que l'équation du mouvement de ces poutres (poutres supérieures et béquilles) est de la forme:

$$E I y^{IV}_{x^4} + \left[k - \omega^2 \mu(x) \right] y = 0$$

Les conditions aux limites de la poutre supérieure sont assez mal définies dans la pratique. Pour un sol parfaitement élastique, la poutre supérieure peut être considérée comme libre. Pour un sol non homogène, on peut considérer que le tassement produit par la mise en place du portique est presque définitif, et à la limite, la poutre supérieure pourra être considérée comme appuyée à ses extrémités. Il est donc intéressant de traiter ces deux cas limites dans lesquels nous dirons que le portique "repose" sur un sol élastique ou qu'il est "enfoncé" dans ce dernier.

A. - PORTIQUE REPOSANT SUR UN SOL ELASTIQUE.

(poutre supérieure pseudo-libre)

Puisque nous sommes en présence d'un problème de vibrations propres, nous savons que les déformées de la poutre supérieure et de la béquilles ne seront connues qu'à une constante multiplicative près. La condition de couplage qui permet l'élimination de cette constante, conduira à l'équation aux valeurs propres. Si les poutres étaient articulées entre elles, la béquille et la poutre auraient chacune sa fréquence propre, et le portique ne pourrait entrer en résonnace; nous n'aurions plus affaire à un problème de couplage, nous excluerons donc ce cas qui ne présente pas d'intérêt théorique.

1. - POUTRE SUPERIEURE.

Les conditions aux limites étant celles d'une poutre libre, nous ferons intervenir deux masses fictives dont les abscisses réduites seront (Fig. 12) $\pi, \frac{\pi}{2}$, conformément à ce que nous avons vu précédemment. Nous aurons trois constantes d'identification et trois conditions identiques (équations 25 du paragraphe II. C. 1)

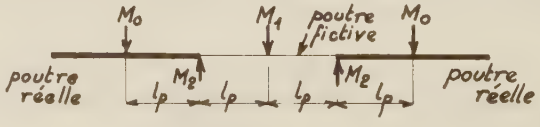


Figure 12.

Rappelons les équations (25):

$$A(1+\sigma S)+B\sigma_1 T-\sigma_2 C U=0$$
$$A\sigma T+B(1-\sigma_1 S)+\sigma_2 C V=0$$
$$A\sigma U+B\sigma_1 U+C(1-\sigma_2 V)=0$$

Il faut adjoindre à ces équations les conditions aux limites qui seront dans ce cas:

$$y'''(\pi/2)=y'''(l_p)=0 \qquad y''(l_p)=y''(-l_p)=\frac{\mathcal{M}_b}{E_p I_p}\cdot\frac{4l_p^2}{\pi^2}$$

En utilisant les notations du tableau I (p. 15), ces conditions s'écrivent:

$$X(\sigma A-\sigma_1 B)=\sigma_2 C Y$$
$$Z(-\sigma A-\sigma_1 B)+\sigma_2 C W=\frac{\mathcal{M}_b}{E_p I_p}\cdot\frac{4l_p^2}{\pi^2}$$

L'élimination des inconnues entre ces cinq équations nous permet de déduire A, B, C en fonction de $\mathcal{M}_b$ et de σ et par suite b_s, $y(\xi)$, $y'(\xi)$. Plus particulièrement $y'(\frac{\pi}{2})$, qui représente la pente de la déformée au point d'abscisse $x = l_p$ s'écrit, en vertu de $y'_\xi = \frac{2l_p}{\pi} y'_x$:

$$y'_x(l_p)=\frac{2l_p\,\mathcal{M}_b}{E_p I_p \pi}\left[\frac{KY-XH}{YZ+XW}\right]\left[1+2\,\frac{XU+YT}{\frac{1}{2}(WX+YZ)(\frac{1}{\sigma}+2V)-2(UX+YT)}\right]$$

ce qui donne, tout calcul fait:

$$y'_x(l_p)=\frac{\mathcal{M}_b\,2l_p}{E_p I_p\,\pi\sqrt{\alpha}}\cdot\left[\frac{f(\alpha)}{sh\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\cos\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}+ch\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}\sin\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}}\right]$$

avec

$$f(p)=\frac{[shp-\sin p]^2}{(chp\sin p+shp\cos p)\frac{\sigma\sqrt{\alpha}}{\pi\sigma}-(chp\cos p+1)}-2\,shp\sin p$$

Si $\qquad p=\sqrt{\alpha}\,\frac{\pi}{2}$

2. - BEQUILLES.

La béquille ne présente pas de discontinuité de masse, et l'équation différentielle qui régit son mouvement est une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients constants. Nous aurons donc une solution dépendant de quatre constantes, que l'on déterminera par les quatre conditions aux limites; c'est le problème classique des vibrations de poutres. La solution générale est de la forme:

$$y = A \operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\xi + B \operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\xi + D \cos\sqrt{\alpha}\xi + E \sin\sqrt{\alpha}\xi \ .$$

Les conditions aux limites particulières seront:

$$y'''_{x^3}(0) = y'''_{x^3}(l) = 0 \ , \quad y''_{x^2}(l) = 0, \quad y''_{x^2}(0) = \frac{\mathcal{M}_b}{E_b I_b}$$

Nous rappelons que les indices b se rapportent à la béquille. Comme pour la poutre supérieure du portique ce ne sont pas les solutions qui nous intéressent mais seulement la pente des béquilles et de la poutre au point de raccordement. On démontre que, en tenant compte de ces conditions aux limites:

$$y'_x(0) = \frac{2\mathcal{M}_b \ l_b}{E_b I_b \ \sqrt{\beta}\,\pi} \times \frac{\operatorname{ch} q \sin q + \operatorname{sh} q \cos q}{1 - \operatorname{ch} q \cos q}$$

avec:

$$-\beta^2 = \frac{K - \omega^2 \mu}{E_b I_b} \times \frac{2 l_b}{\pi}^4 \qquad q = \sqrt{\beta}\,\frac{\pi}{2}$$

3. - EQUATION AUX VALEURS PROPRES.

Les angles droits restent droits pendant la déformation; l'égalité des pentes de la poutre supérieure et de la béquille au point de raccordement donne l'équation générale aux valeurs propres

$$2 \operatorname{sh} p \sin p - \frac{[\sin p - \operatorname{sh} p]^2}{(\operatorname{ch} p \sin p + \operatorname{sh} p \cos p)\dfrac{m p^3}{M\left(p^4 + \dfrac{K l^4}{E_p I_p}\right)} - (\operatorname{ch} p \cos p + 1)} = \tag{31}$$

$$= \left[\frac{\operatorname{ch} q \sin q + \operatorname{sh} q \cos q}{1 - \operatorname{ch} q \cos q}\right] (\operatorname{ch} p \sin p + \operatorname{sh} p \cos p) \left[\frac{E_p I_p}{E_b I_b}\right]^{3/4} \ \ldots$$

$$\text{où } q = p \frac{l_b}{l_p} \left[\frac{E_p I_p}{E_b I_b}\right]^{\frac{1}{4}}$$

et les fréquences propres sont données par:

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu} + \frac{E_p I_p}{\mu l_p^4} p^4}$$

Les solutions de cette équation seront les abscisses des points d'intersection des courbes transcendantes représentant les deux membres de cette équation. La résolution est assez longue mais elle ne présente pas de difficultés.

Si la masse M est très petite, le premier membre de l'équation (28) se réduit à 2sh p sin p/ch p sin p + sh p cos p. Nous avons tracé les courbes pour le cas théorique limite M=0, ainsi que pour M=10g, masse utilisée dans les expériences dont il sera rendu compte plus et qui est encore assez petite pour autoriser des simplifications dans l'équation aux valeurs propres.

Remarque:

Notons que, si l'équation aux valeurs propres des poutres seules précédemment étudiées dans les deux chapitres précédents était représentée graphiquement par des courbes transcendantes et une courbe hyperbolique, le couplage fait apparaître deux séries semblables de courbes transcendantes (marquées M=10g et q=0,5p, p, 2p sur la figure 13).

Cas particulier:

Si la longueur de la béquille tend vers 0, q tend vers 0 et le second membre de l'équation aux valeurs propres croît indéfiniment puisque son développement limité a pour premier terme 1/q. Le dénominateur du premier membre de cette équation doit donc s'annuler, ce qui entraine :

$$\frac{ch p \cos p + 1}{ch p \sin p + sh p \cos p} = \frac{m p^3}{M\left(p^4 + \frac{K l_p^4}{E_p I_p}\right)}$$

Cette dernière équation est bien celle aux valeurs propres d'une poutre libre reposant sur fondation élastique et surchargée en son milieu (équation (27) du paragraphe II B 3 ou II C 1).

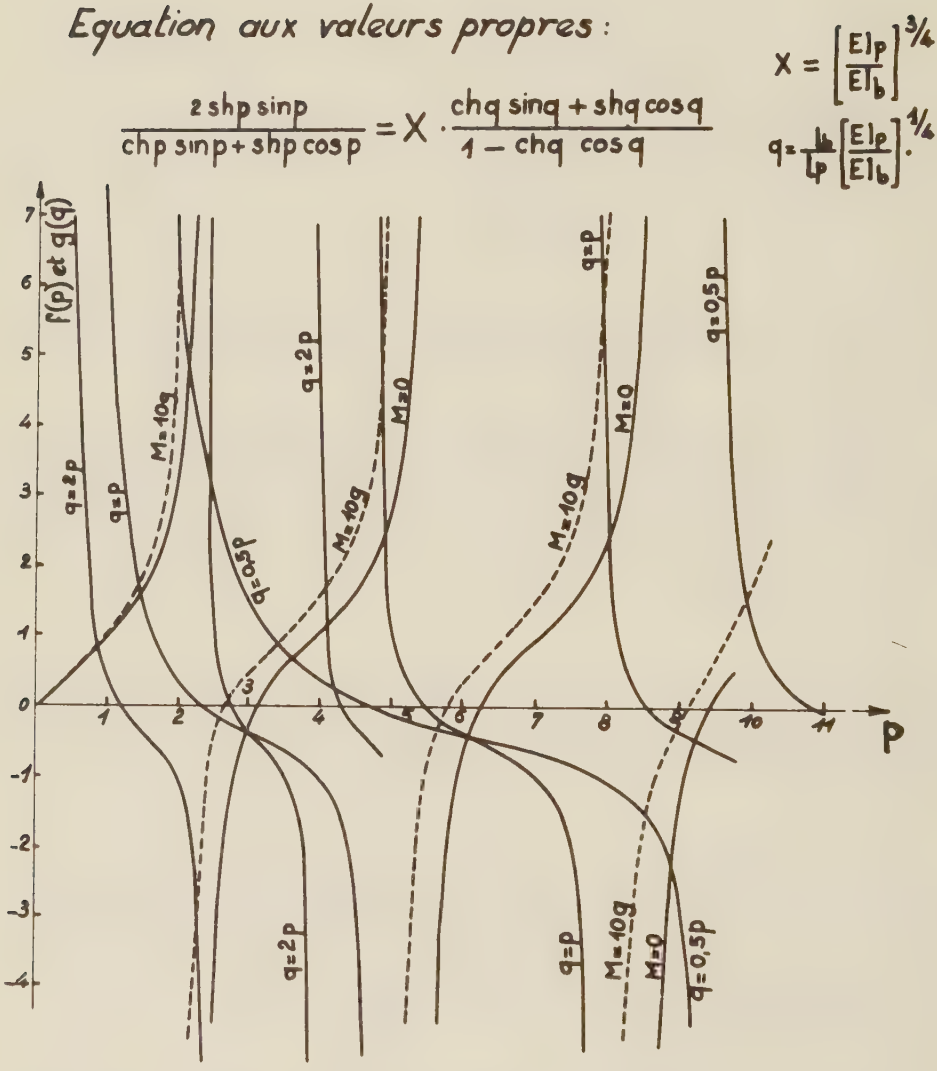

Equation aux valeurs propres :
$\frac{2 \operatorname{shp} \sin p}{\operatorname{chp} \sin p + \operatorname{shp} \cos p} = X \cdot \frac{\operatorname{chq} \sin q + \operatorname{shq} \cos q}{1 - \operatorname{chq} \cos q}$
$X = \left[\frac{EI_p}{EI_b}\right]^{3/4}$
$q = \frac{l_b}{l_p}\left[\frac{EI_p}{EI_b}\right]^{1/4} \cdot p$
f(p) et g(q)
p
q=2p
q=p
M=10q
q=0,5p
M=0

Fig. 13

De plus, pour plus de simplification, nous avons considéré que les béquilles de la poutre supérieure étaient identiques: même module d'élasticité, même masse, même section. Seule, la longueur de la béquille variait par rapport à celle de la poutre supérieure; les courbes q=2p, q=p, q=0,5p correspondent aux valeurs utilisées dans le montage expérimental. Sans examiner en détail tous les résultats qui seront confrontés plus loin avec l'expérience, il est intéressant de noter que des portiques dont les béquilles ont des longueurs différentes (moitié,double) peuvent avoir une fréquence propre commune: une courbe (M=...) peut rencontrer deux courbes (q=...) en un même point.

Si le sol a un coefficient de réaction horizontal assez fort, l'effet du sol sur les béquilles enfoncées peut gêner le mouvement des extrémités de la poutre supérieure; le comportement de celle-ci est alors vraisemblablement analogue à celui d'une poutre appuyée. Il est donc instructif de traiter ce cas.

B. - PORTIQUE ENFONCE DANS UN SOL ELASTIQUE. (poutre supérieure pseudo-appuyée).

Les trois conditions d'identification écrites pour la poutre supérieure du portique dans le problème précédent sont encore valables; au contraire, les conditions aux limites seront remplacées par :

$$-Z\,(\sigma A + \sigma_1 B) + \sigma_2 CW = \frac{4 l_p^2}{\pi^2}\,\frac{\mathcal{M}}{E_p I_p}$$

$$-U\,(\sigma A + \sigma_1 B) + \sigma_2 CV = 0$$

qui expriment que:

$$y''_{\frac{\pi}{2}^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = y''_{\frac{\pi}{2}^2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4 l_p^2}{\pi^2}\,\frac{\mathcal{M}}{E_p I_p} \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

La troisième conditiond'identification (paragraphe III A 1 ou II C 1) compte tenu de la seconde de ces deux dernières conditions aux limites, entraine notamment C=0, ce qui s'accomode de M = 0; il est donc inutile de prévoir de charge fictive aux extrémités de la poutre dans ce cas. La résolution du système aboutit finalement à:

En utilisant les notations du tableau I (p. 15) il vient:

$$y'_x(l_p) = \frac{2 l_p \mathcal{M}_b}{E_p I_p \pi \sqrt{\alpha}} \cdot \frac{ch\,p - \cos p}{\sin p - sh\,p} \times g(p)$$

avec

$$g(p) = \frac{sh\,p \sin p - \frac{\pi \sigma}{2\alpha\sqrt{\alpha}}(sh\,p \cos p + ch\,p \sin p)}{ch\,p \cos p - \frac{\pi \sigma}{2\alpha\sqrt{\alpha}}(sh\,p \cos p - ch\,p \sin p)}$$

On déterminera les constantes d'intégration de la solution générale de la béquille à l'aide des quatre conditions aux limites suivantes:

$$y''_{\xi^2}(0) = -\frac{\mathcal{M}\, 4 l_b^2}{E_b I_b \pi^2} \qquad y''_{\xi^1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'''_{\xi^3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

La pente à l'extrémité supérieure de la béquille sera:

$$y'_x(0) = \frac{2 \mathcal{M}_b l_b}{E_b I_b \pi \sqrt{\beta}} \cdot \frac{2\,[ch\,q \cos q + 1]}{ch\,q \sin q - sh\,q \cos q}$$

Finalement, l'égalité des pentes de la béquille et de la poutre supérieure donne l'équation aux valeurs propres:

$$\frac{ch\,p - \cos p}{\sin p - sh\,p} \cdot \frac{sh\,p \sin p - \frac{\sigma\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha}}(ch\,p \sin p + sh\,p \cos p)}{ch\,p \cos p - \frac{\sigma\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha}}(sh\,p \cos p - ch\,p \sin p)} = \frac{(ch\,q \cos q + 1)\,2}{ch\,q \cos q - ch\,q \sin q} \left[\frac{E_p I_p}{E_b I_b}\right]^{\frac{3}{4}}$$

La résolution graphique de l'équation (32) est représentée sur la figure 14 ci-après pour le cas M=0. Dans le cas général, si l_b tend vers 0, il en est de même pour q, ce qui exige d'après (32) que:

$$th\,p - tg\,p = \frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\pi\sigma}$$

On retrouve bien l'équation aux valeurs propres d'une poutre soumise en son milieu à une masse concentrée et appuyée à ses extrémités (équation 17b du paragraphe II B 1).

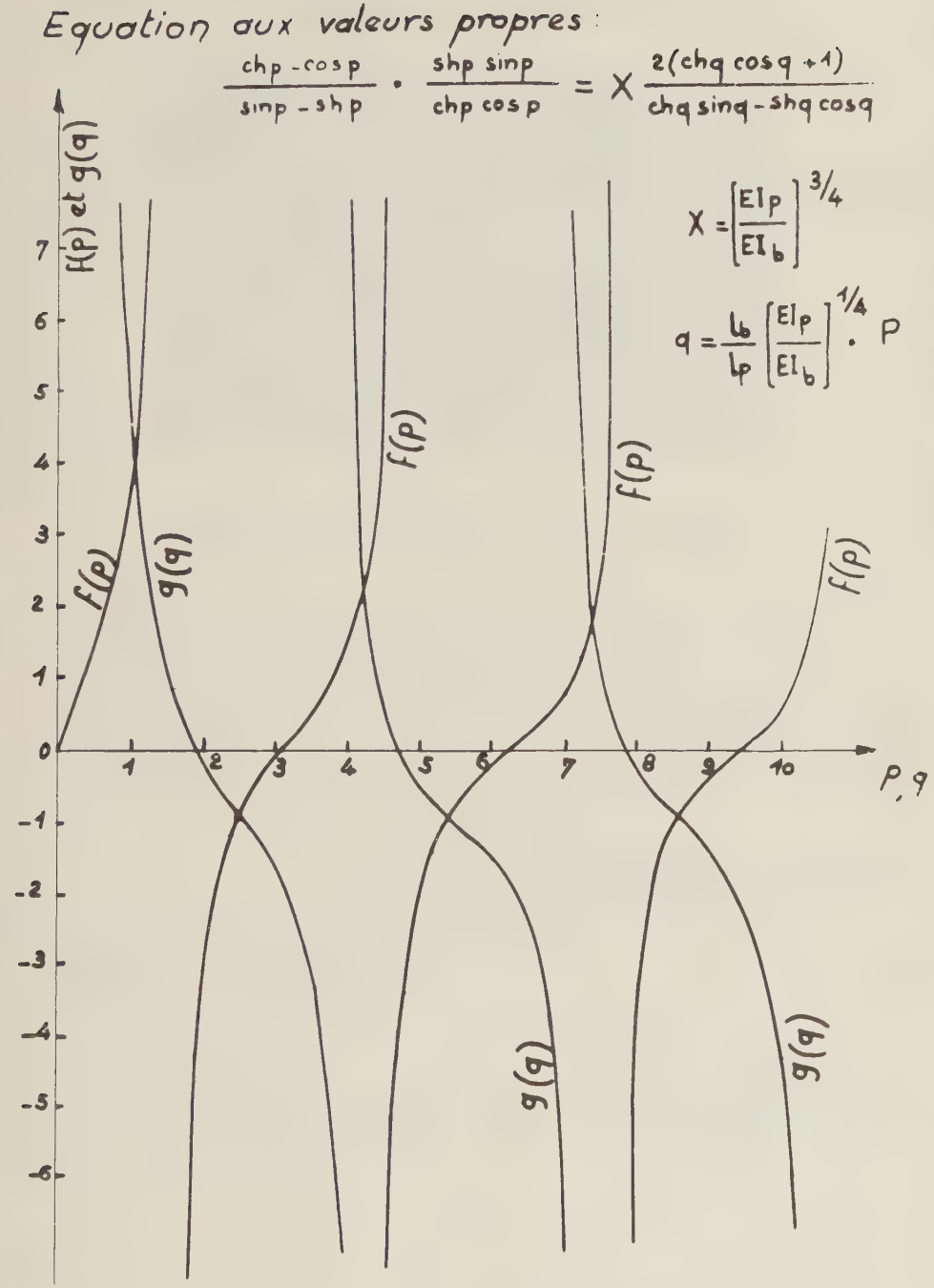

Equation aux valeurs propres :
$\frac{chp - \cos p}{\sin p - sh p} \cdot \frac{shp \sin p}{chp \cos p} = X \frac{2(chq \cos q + 1)}{chq \sin q - shq \cos q}$
$X = \left[\frac{EI_p}{EI_b}\right]^{3/4}$
$q = \frac{l_b}{l_p}\left[\frac{EI_p}{EI_b}\right]^{1/4} \cdot p$
F(p) et g(q)
f(p)
g(q)
f(p)
g(q)
f(p)
g(q)
f(p)
p, q
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Fig. 14

C. - VERIFICATION EXPERIMENTALE.

Nous avons réalisé un petit portique dont les caractéristiques étaient les suivantes:

poutres supérieures:

- matière: duralumin (E=9 000 Kg/mm^2)
- masse linéaire: 1,5g/cm ou 0,75g/cm
- dimensions: 0,5 x 1 x 40 cm
  0,5 x 0,5 x 20 cm

béquilles: même matière et même moment d'inertie dans chaque expérience que ceux de la poutre.

- dimensions: 0,5 x 1 x 20 cm ou 0,5 x 0,5 x 20 cm
  0,5 x 1 x 15 cm ou 0,5 x 0,5 x 10 cm
  0,5 x 1 x 10 cm ou 0,5 x 1 x 5 cm

Les béquilles et les poutres reposaient sur des matelas de caoutchouc mousse dans la première série d'expériences; dans l'autre série, la poutre reposait sur du sable sec, dans quoi les béquilles étaient enfoncées. Les coefficients de réaction définis précédemment ont été déterminés par une méthode acoustique pour le caoutchouc ($k=3.10^5$ dynes /cm^3) et par une méthode statique pour le sable ($k= 9.10^5$ dynes /cm^3). La charge était de 10g et les courbes théoriques correspondent à cette valeur tracée sur la figure 13.

1. -PORTIQUE"REPOSANT" SUR CAOUTCHOUC.

Le dispositif de mesure, identique à celui que l'on a utilisé pour les poutres, est représenté sur la photo 3. Le croquis ci-après permet de distinguer:

1 Compteur électronique Rochar.
2 Générateur basses-fréquences Férisol.
3 Oscillographe cathodique Philips.
4 Boite d'alimentation pour pré-amplificateur du capteur.
5 Modèle de portique utilisé.

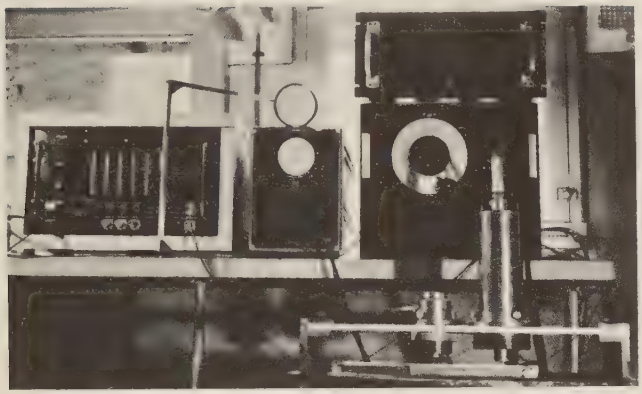
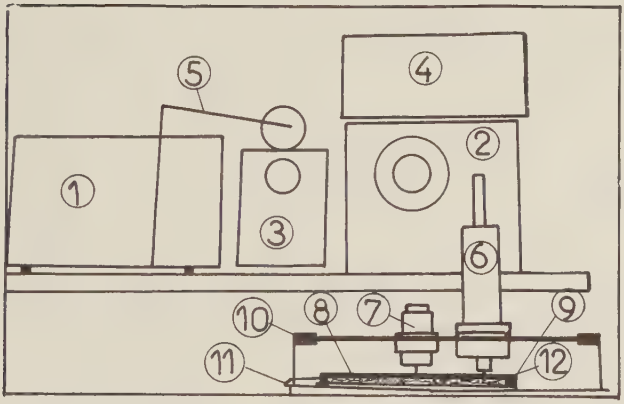


Photo 3.



6 Capteur électrostatique
7 Excitateur électromagnétique Philips
8 Poutre supérieure du portique étudié
9 Béquilles de ce même portique (enfoncées dans le sable dans la seconde expérience)
10 Support du capteur.
11 Bac à sable (avec support en bois pour maintenir les bandes de caoutchouc dans la première expérience.).
12 Caoutchouc mousse.

Dans ce cas particulier (caoutchouc), les fréquences propres sont reliées aux valeurs propres par la relation:

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{\mu} + \frac{E_p I_p}{\mu l_p^4} p^4} \quad \text{soit} \quad N = 15{,}9\sqrt{20 + 3p^4} \text{ cgs}$$

Le tableau 4 rend compte des résultats obtenus. Les valeurs théoriques de p , lues sur la figure 13 font correspondre les valeurs théoriques des fréquences (N). Les valeurs théoriques de p sont les abscisses des points d'intersection de la courbe en pointillés avec les courbes q=..... Nous n'avons pas tracé les courbes q=0, 75p, et 0, 25p pour ne pas surcharger la figure. Le portique géométriquement carré correspond à q=2p. Les chiffres sans parenthèse correspondent aux fréquences déterminées expérimentalement, alors que les autres aux fréquences théoriques.

- TABLEAU IV -

q = p		q=0, 75p		q=0, 5p		q=0, 25p	
p	N	p	N	p	N	p	N
1, 4	92 (92)	1, 8	100 (110)	1, 9	112 (120)	1, 8	98 (110)
2, 5	173 (185)	2, 9	220 (235)	3, 4	316 (320)	4, 7	557 (600)
4, 55	525 (570)	5, 1	692 (720)	5, 7	900 (900)	6, 6	1177 (1200)
5, 7	890 (900)	6, 7	1130 (1200)	8, 9	2100 (2200)	9	2450 (2250)
7, 6	1900 (1600)	7, 3	(1500)	9, 8	2550 (2600)	10, 5	(3100)
9	2250 (2240)	8	(1770)	12	(4000)	12	(4000)

On voit que, tout au moins dans le domaine (de fréquences) exploré, la concordance des résultats théoriques et expérimentaux est satisfaisante.

2. - PORTIQUE (ENFONCE) DANS LE SABLE SEC.

Si l'on utilise le même portique que précédemment, les fréquences propres seront liées aux valeurs propres par:

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu} + 3p^4} \qquad \text{soit} \quad N = 15,9\sqrt{60 + 3p^4}$$

Les béquilles, entièrement enfoncées dans le sable sec nous ont permis de nous rapprocher de l'hypothése de la poutre supérieure pseudo-libre. Les valeurs de p seront dans ce cas les abscisses des points d'intersection des courbes f(p) et g(q), tracées sur la figure 14. Les résultats obtenus sont inclus dans le tableau V. Les chiffres sans parenthèse correspondent aux fréquences expérimentales, alors que les autres aux calculs. Nous avons fait les essais pour deux portiques:

1°) portique utilisé dans les expériences précédentes (colonne de droite du tableau)
2°) portique deux fois plus petit (colonne de gauche) où :

$$N = 15,9\sqrt{60 + 48p'^4} \qquad \text{puisque} \quad l'_b = l_b/2$$

- TABLEAU V -

(p)	N	(p)	N
1	152 (165)	1	116 (125)
2,5	690 (720)	2,5	210 (212)
4,2	(1950)	4,2	450 (500)
5,4	(3200)	5,4	730 (800)

D'après ces résultats, l'hypothèse envisagée, qui consistait à considérer la poutre comme appuyée dans le cas du portique enfoncé dans le sol semble donc admissible. Nous avons jugé intéressant de voir si cet état de choses était confirmé également pour les problèmes statiques.

D. - ETUDE STATIQUE D'UN PORTIQUE

(enfoncé dans du sable sec, supportant une charge au milieu de la poutre supérieure).

1. - THEORIE.

Si y est la flèche à l'abscisse x d'une poutre reposant sur fondation élastique de coefficient de réactionk, on sait que l'effort tranchant T_x, est défini par:

$$\frac{dT_x}{dx} = ky. \quad \text{Or} \quad T_x = \frac{dM_f}{dx}, \quad \text{et } M_f = EI\,y'' \qquad \text{Il vient:}$$

$$\frac{d^2M_f}{dx^2} = ky = EI\,y^{IV}_{x^4}$$

La flèche y est donc la solution d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre. Pour l'étude dynamique, nous avions posé:

$$-\alpha^2 = \frac{K - \mu\omega^2}{E_p I_p}(2l_p)^4 \qquad (2l_p, \text{longueur totale de la poutre}).$$

Le cas statique correspond à $\omega = 0$, et en posant $\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}$ il vient: $\pi\sqrt{\alpha} = 2 l_p \lambda (1 - i)$ car $\sqrt{2}.\sqrt[4]{-1} = 1 - i$

Si, dans les fonctions propres de la poutre supérieure obtenues précédemment lorsque nous avons fait l'étude dynamique du portique, on remplace $\pi\sqrt{\alpha}/2$ par $\lambda\, l_p(1-i)$, on obtient la flèche statique de cette courbe. Nous n'expliciterons pas de calcul, qui est long; on trouve que le moment fléchissant est de la forme:

$$\frac{P}{2\lambda M_f} \cdot C(\lambda l_p, \lambda x) + A(\lambda l_p, \lambda x) = \frac{E_p I_p}{M_f} y''$$

où les coefficients: A (x, λ, l_p) et C(x, λ, l_p) sont donnés par:

a) pour la poutre appuyée:

$$A(\operatorname{ch} 2\lambda l_p + \cos 2\lambda l_p) = \operatorname{ch}\lambda x \sin\lambda x \sin 2\lambda l_p - \operatorname{sh}\lambda x \cos\lambda x \operatorname{sh} 2\lambda l_p + \operatorname{ch}\lambda x \cos\lambda x (\operatorname{ch} 2\lambda l_p + \cos 2\lambda l_p).$$

$$C\,(ch2\lambda l_p + \cos 2\lambda l_p) = ch\lambda l_p \cos\lambda l_p\,(sh\lambda x \cos\lambda x + ch\lambda x \sin\lambda x)$$

$$- \sin\lambda l_p\, sh\lambda l_p\,(sh\lambda x \cos\lambda x - ch\lambda x \sin\lambda x)$$

b) pour la poutre libre:

$$A\,(sh2\lambda l_p + \sin 2\lambda l_p) = \sin\lambda x\, ch\lambda(2l_p - x) + \cos\lambda x\, sh\lambda(2l_p - x)$$

$$+ sh\lambda x \cos\lambda(2l_p - x) + ch\lambda x \sin\lambda(2l_p - x)$$

$$C\,(sh2\lambda l_p + \sin 2\lambda l_p) = (sh\lambda l_p \cos\lambda l_p - ch\lambda l_p \sin\lambda l_p)(sh\lambda x \cos\lambda x - \sin\lambda x\, sh\lambda x)$$

$$+ 2\, sh\lambda l_p \cos\lambda l_p \sin\lambda x\, sh\lambda x$$

Nous nous sommes intéressé au moment fléchissant et non à la flèche en vue des expériences réalisées à l'aide de jauges de contrainte, qui donnent l'allongement unitaire, relié au moment fléchissant par $\varepsilon = v M_f / EI$

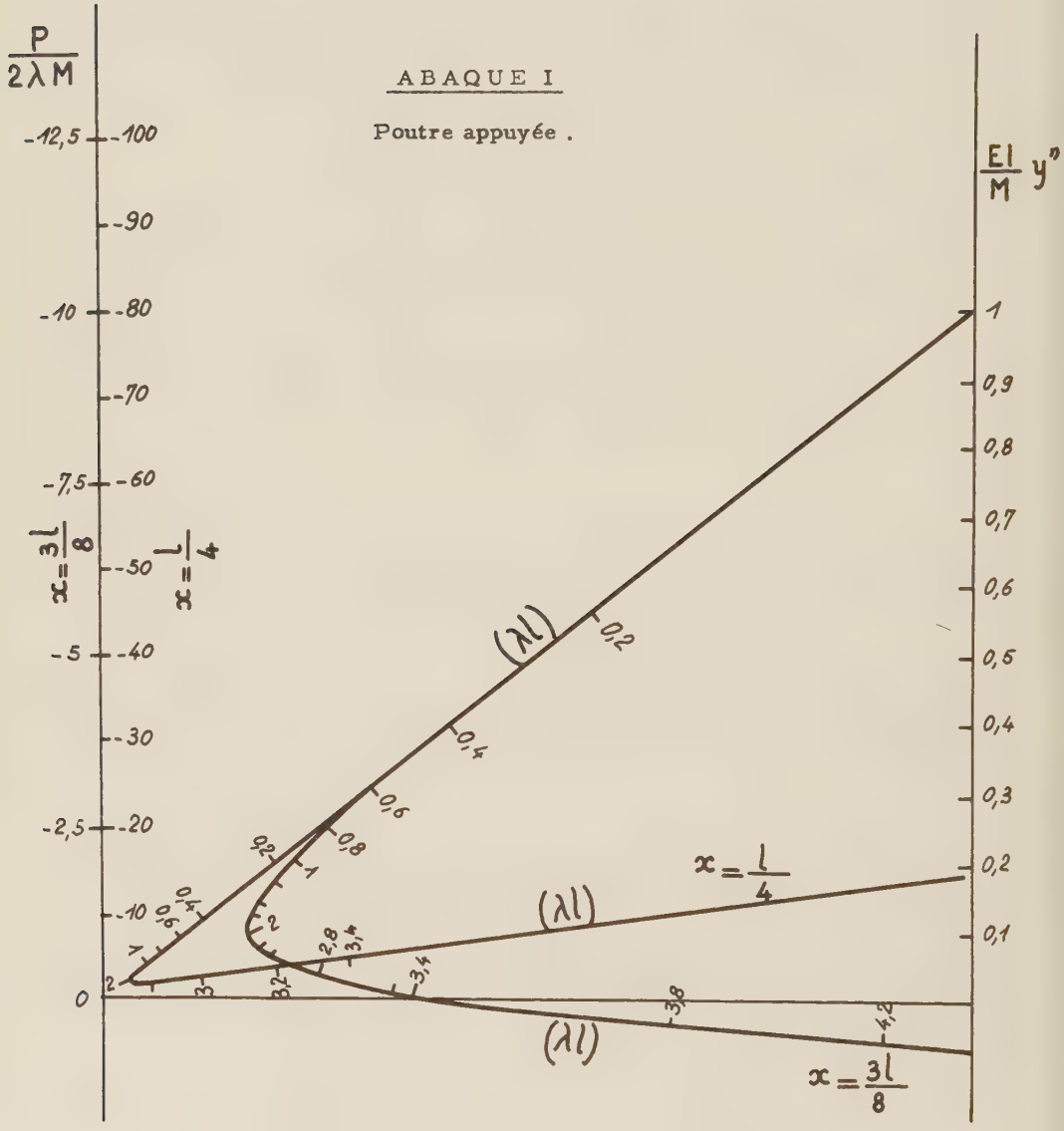
Les expressions qui donnent le moment fléchissant ne sont pas simples. Nous avons jugé bon de présenter ces résultats sous forme d'abaques à points alignés de façon à en simplifier le plus possible l'utilisation, qui, en pratique, ne manque pas d'intérêt. Les abaques ci-après rendent compte de la variation du moment fléchissant avec l'abscisse.

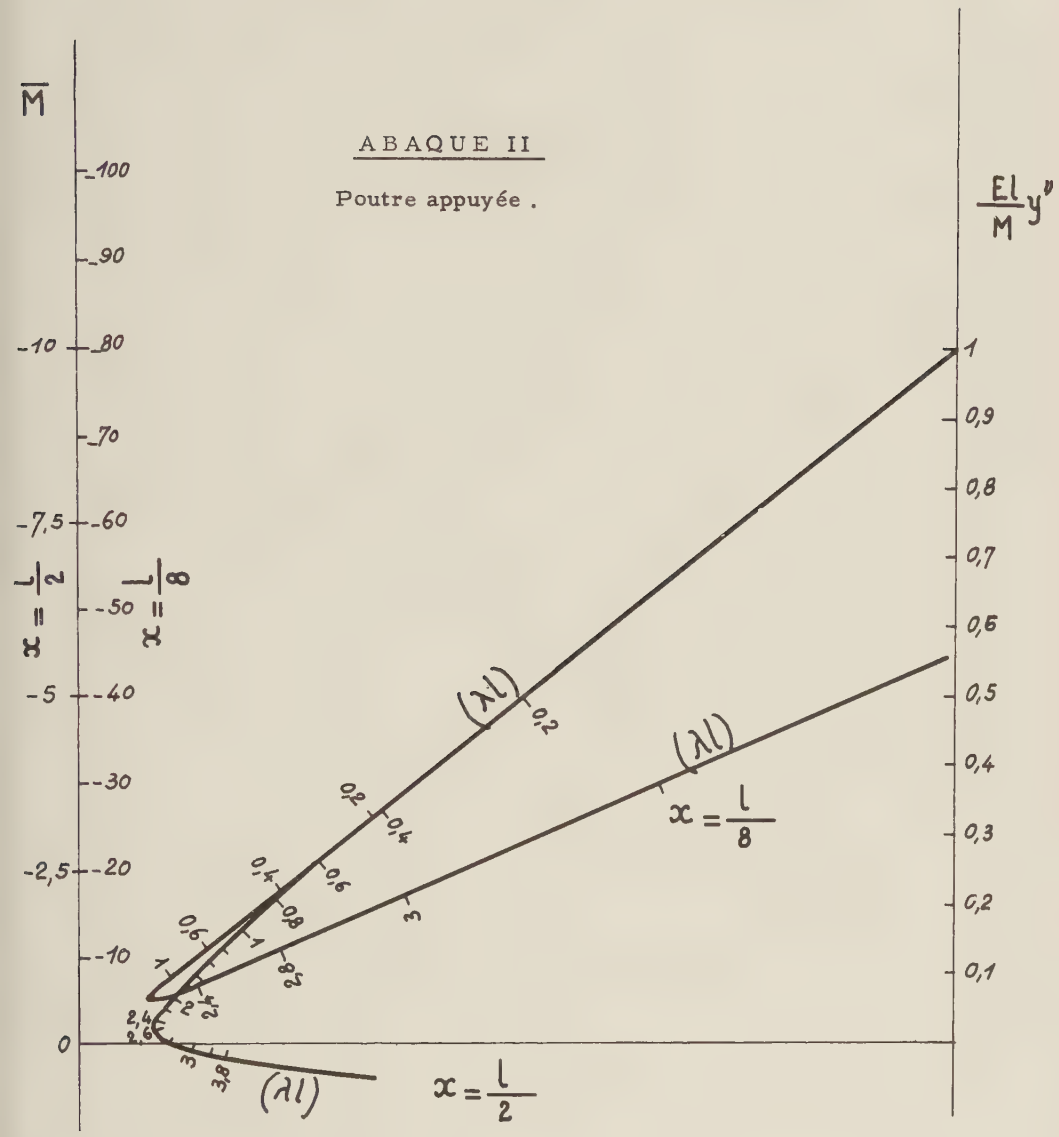
2. - MESURES.

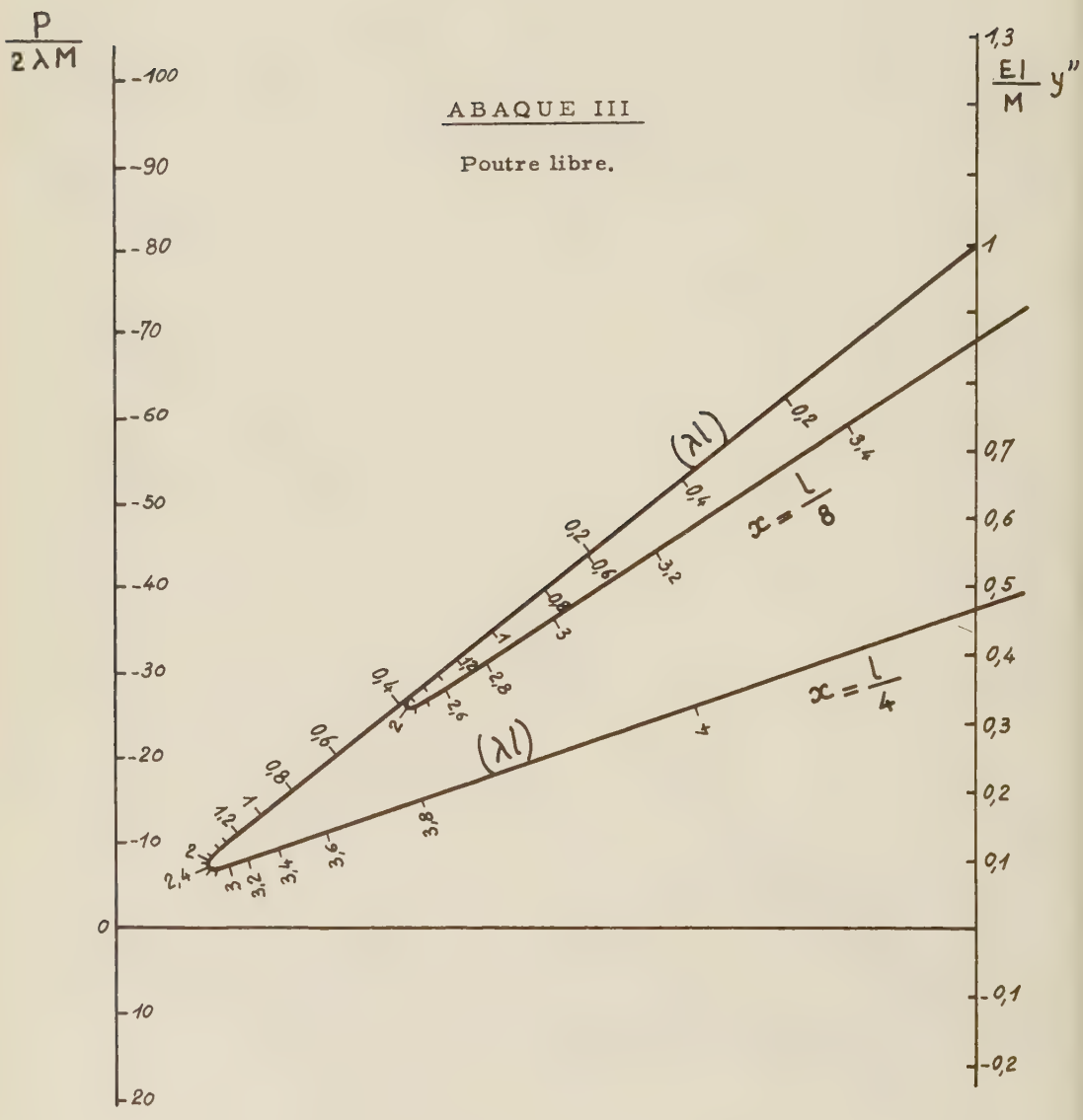
Nous avons utilisé le même sable sec $k = 9 \times 10^5$ cgs que pour les essais dynamiques. Une tige pointue à son extrémité inférieure, guidée dans toute sa longueur, et terminée à son autre extrémité par un plateau supportant la charge, était appliquée au milieu de la poutre supérieure du portique, qui était apparente. Les béquilles étaient enfoncées complètement dansle sable. Le portique utilisé avait pour dimensions:

- poutre supérieure: 0,5 x 1 x 40 cm,
- béquille : 0,5 x 1 x 20cm.

La charge P était telle que $P/2\lambda M_f = -4$, avec:

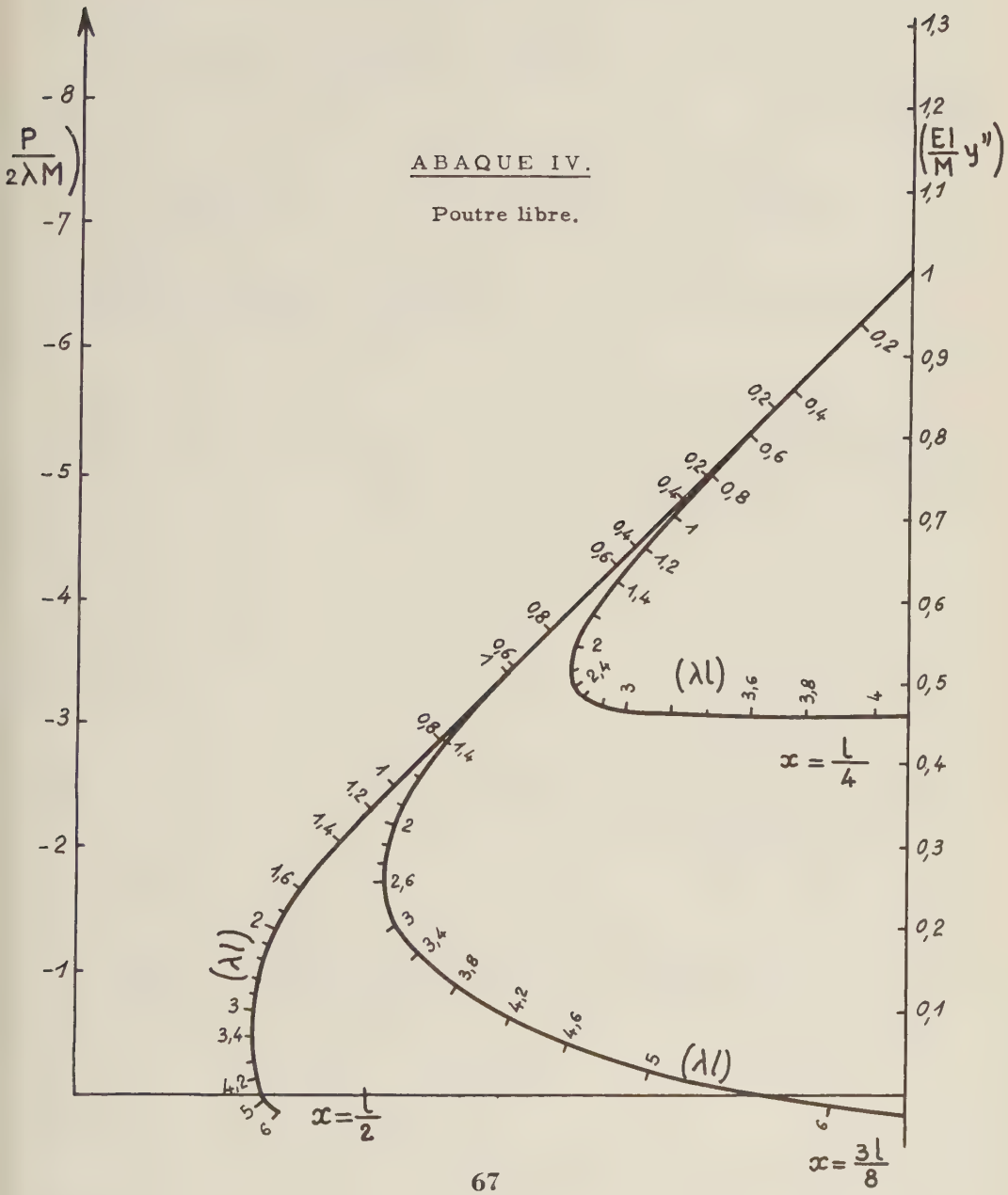

ABAQUE I
Poutre appuyée .
P / 2λM
EI/M y"
x = 3l/8
x = l/4
(λl)
x = l/4
(λl)
(λl)
x = 3l/8


ABAQUE II
Poutre appuyée .
M/M
EI/M y''
x = l/2
x = l/8
-100
-90
-10
-80
-70
-7,5
-60
-50
-5
-40
-30
-2,5
-20
-10
0
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
(λl)
0,2
0,4
0,6
0,8
1
2
2,4
2,8
3
3,8
x = l/8
x = l/2


P / 2λM
EI / M y"
ABAQUE III
Poutre libre.
(λl)
x = l/8
x = l/4
-100
-90
-80
-70
-60
-50
-40
-30
-20
-10
0
10
20
1,3
1
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
-0,1
-0,2

ABAQUE IV.

Poutre libre.



Pour mener à bien ces essais, il fut nécessaire de réaliser au laboratoire un pont de mesures à jauges dans les caractéristiques étaient les suivantes:

1°) Stabilité: sensibilité d'équilibre: 10^{-6}
2°) Résistance équivalente: 120 ohms.
3°) Trois chaines de déséquilibrage en 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} de dR/R.
4°) Facteur de la jauge Sexta utilisée: K=2, 05.

Cette réalisation a fait l'objet d'un Diplôme d'Etudes Supérieures présenté par J. Paris (juillet 1954, devant la Faculté des Sciences de Marseille).

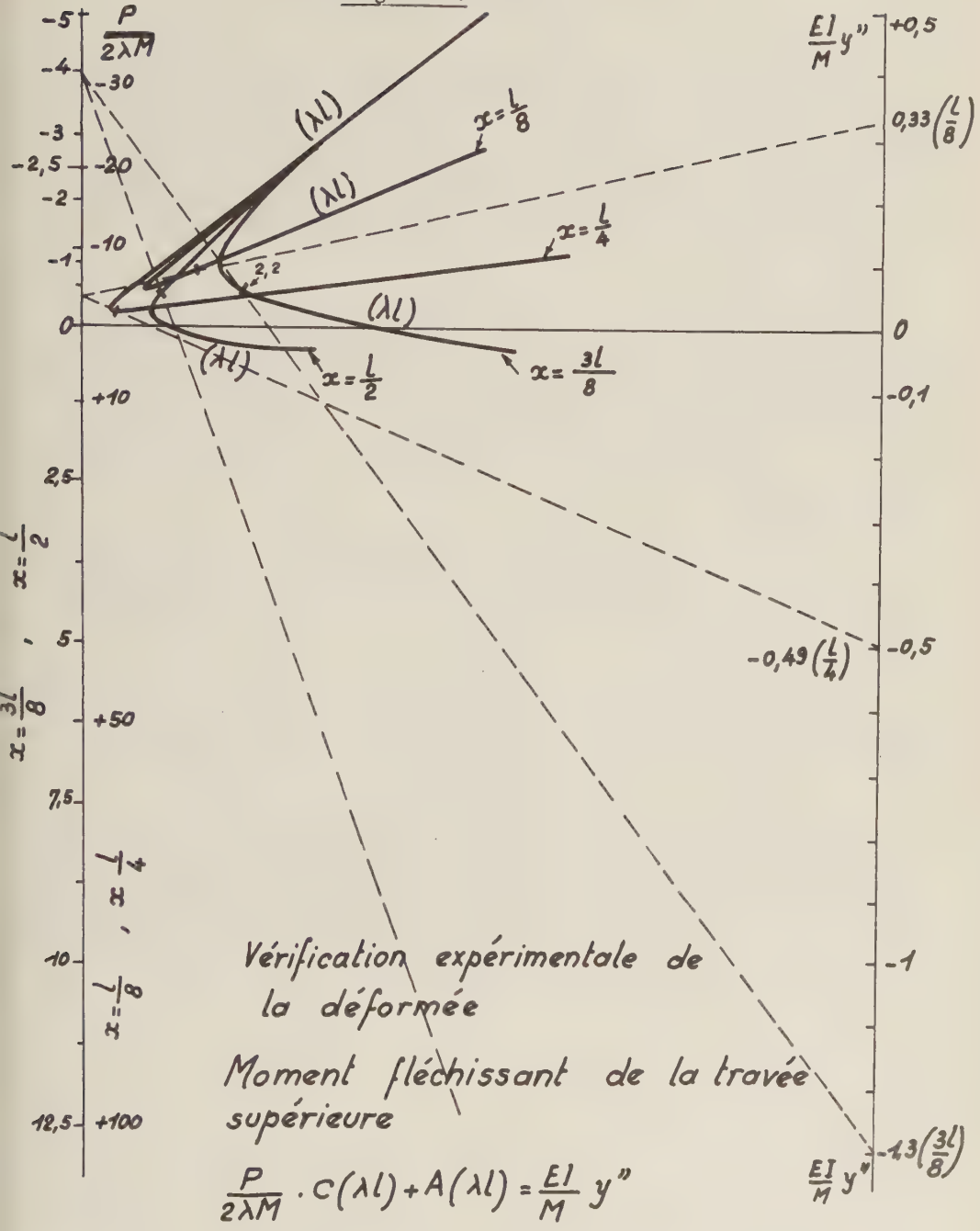
Nous avons effectué les mesures pour x= $l_p/4$, $l_p/2$, $3l_p/4$, l_p, ce qui correspond aux valeurs lues sur l'abaque: $l/8$, $l/4$, $3l/8$, $l/2$. L'abaque de la page 62 groupe les deux abaques relatifs à la poutre pseudo-appuyée, de façon à pouvoir lire les valeurs négatives, exception faite de x= $l/8$. Les résultats sont traduits dans le tableau 6.

- TABLEAU VI -

Abscisses x		$l_p/4$	$l_p/2$	$3l_p/4$	l_p
$\frac{E_p I_p}{M_6} y''_{x^2}$	Poutre appuyée Théorie.	+ 0, 3	- 0, 5	- 1, 3	- 2, 1
	Poutre libre. Théorie	+ 0, 84	+ 0, 45	- 0, 2	- 1, 3
	Expérience.	+ 0, 33	- 0, 49	- 1, 33	- 1, 95

La concordance très satisfaisante des résultats de ce tableau confirme bien l'hypothèse que nous avions faite: dans le sable, la poutre supérieure peut être considérée comme appuyée.

Figure 15.



Vérification expérimentale de la déformée

Moment fléchissant de la travée supérieure

$$\frac{P}{2\lambda M} \cdot C(\lambda l) + A(\lambda l) = \frac{EI}{M} y''$$

Les exemples traités dans les chapitres précédents semblent indiquer que la méthode exposée est efficace lorsque, dans un problème à une dimension, la discontinuité porte sur la masse. Qu'en sera t-il lorsqu'elle affectera l'une des autres constantes, k ou EI? De telles hypothèses ne sont pas sans intérêt pratique: il est fréquent, en effet, que les sols ou fondation d'une structure aient des propriétés variables le long de celle-ci, et que la structure elle-même soit composée de portions de natures ou de formes différentes.

Or, le problème mathématique n'est pas le même suivant que l'on trouble k ou EI: dans le premier cas, c'est, comme pour μ, le terme d'ordre zéro de l'équation qui est intéressé; l'équation restant de même forme, les conclusions subsistent. Il n'y a donc pas de difficulté à traiter les problèmes où k est discontinu. Si la discontinuité porte sur EI, au contraire, il faut considérer ce produit comme une fonction d'abscisse, et l'équation de la déformée

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\,y'') + (k - \mu\omega^2)\,y = 0$$

donne, en posant $EI\,y'' = Y$,

$$EI\,Y'' + (k - \mu\omega^2)\,Y = 0$$

Le coefficient éventuellement discontinu est celui du terme du quatrième ordre. Si l'on veut appliquer la méthode des chapitres précédents, on rencontrera des séries du type $\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{s^4}{s^4 - \alpha^2}$, dont la convergence n'est pas assurée partout.

Il faudra alors prendre des précautions qui feront perdre aux calculs et leur élégance et leur sécurité. Nous signalons donc comme intéressant le problème de EI discontinu, sans prétendre, disposer, pour le moment, de méthode vraiment satisfaisante pour le traiter.

Signalons de même qu'il nous a paru intéressant d'envisager le cas où l'hétérogénéité du sol (k) était aléatoire, problème qui semble bien traduire le cas de sols naturels. Il faudrait alors sans doute pouvoir déterminer l'espérance mathématique ou l'autocorrélation $y_{**}y$ de la fonction aléatoire y, en fonction avec $k_{**}k$, donnée, caractérisant l'hétérogénéité du sol. Nous avons rencontré de grandes difficultés à traiter ce problème non linéaire, et nous contentons ici de le mentionner.

- BIBLIOGRAPHIE -

de la première partie.

[1] Vogel Th. "Sur l'application de la théorie des équations différentielles à coefficients périodiques".
Compt. Rend. Acad. Sci., Paris 228 (1949), 162.

[2] Vogel Th. "Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la physique mathématique".
Edition du C. N. R. S., Paris(1953).

[3] Karman Th. et Biot A. "Mathematical methods in engineering".
McGraw-Hill Book Co, New York(1940), pp. 290-295.

[4] Lee W. et Saibel E. "Free vibrations of constrained beams"
J. appl. Mech. 19 (1952), 471.

[5] Macduff J. N. et Curreri J. R. "Vibration control"
McGraw-Hill Book Co, New York (1958), 248-285

[6] Jullien Y. "Effet d'une masse concentrée sur les modes propres de vibration d'une poutre reposant sur une fondation élastique"
J. Phys. Rad. 16 (1955), 107-108.

[7] Ayre R. S. et Jacobsen J. S. "Natural frequencies of continuous beams of uniform span length".
J. appl. Mech. 17 (1950), 391.
"Engineering Vibrations"
McGraw-Hill Book Co, New York (1956).

[8] Jullien Y. "Vibrations d'un portique enfoncé dans un solélastique".
Actes du 9ème Congrès Int. de Mec. Appl. de Bruxelles septembre 1959, Tome V, p. 419-33.

[9] Hetenyi M. "Beams on elastic foundations"
Univ. of Michigan Press (1946).

DEUXIÈME PARTIE

PROBLÈMES A DEUX DIMENSIONS

Applications: vibrations de plaques minces.

Sommaire:

La méthode précédemment exposée, appliquée à l'étude des vibrations des poutres, est étendue aux problèmes à deux dimensions (Chap. IV). L'étude des vibrations des plaques appuyées et "encastrées-guidées" sur leurs bords ne présente pas de difficulté, si l'on tient compte des résultats de la première partie, et conduit à des solutions simples. La résolution du problème des vibrations de laplaque libre sur ses bords est plus compliquée et nécessite une infinité de masses fictives m_i; par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la théorie du potentiel, on considère m_i comme dépendant d'un paramètre variable,et on intégre le long d'un contour convenable: la condition de possibilité de résolution du problème est l'équation en valeurs propres du système.

On a ainsi obtenu une solution de principe de ce problème réputé très difficile; toutefois, cette solution se prête mal à des calculs effectifs et l'on montre comment ceux-ci peuvent être conduitspar la méthode approchée de Ritz,(Chap. V) appliquée à notre cas particulier de discontinuité de masse; en utilisant les résultats de la première partie, on traitera également du couplage de plaques (Chap. VI).

Le calcul numérique, effectué dans ces cas particuliers, donne des modes propres qui sont en accord avec les résultats de l'expérience, menée parallèlement.

°
° °

CHAPITRE IV

LA MÉTHODE DES MASSES FICTIVES DANS LES PROBLÈMES A DEUX DIMENSIONS

A. - PRINCIPE .

La méthode de calcul que nous avons exposée dans la première partie de ce travail peut être appliquée aux problèmes à deux dimensions. De la même façon que nous avions traité des vibrations transversales de poutres, nous sommes amené à étudier celles de plaques minces. Il est raisonnable de penser que la forme du contour qui délimite la plaque puisse entrainer des simplifications dans les théories usuelles. Le cas, par exemple, du contour circulaire qui a l'avantage, en plus de la symétrie, de ne présenter aucune discontinuité, a pu donner lieu à des solutions finies Le contour le plus simple qui vienne ensuite à l'esprit semble le rectangle (le carré comme cas particulier). C'est ainsi que la seconde partie de cette étude sera consacrée aux vibrations transversales de plaques rectangulaires minces.

Soit donc une plaque rectangulaire $0 < x < a$, $0 < y < b$, d'épaisseur h, de rigidité élastique D, posée éventuellement sur une fondation élastique de coefficient de réaction k, et soumise à une masse M, distribuée de telle façon que la masse élémentaire de la plaque $\mu(x, y) = \mu + M \delta [P(x,y)-p(x,y)]$ Rappelons que:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Si, après avoir appliqué le principe de la moindre action, on sépare la solution $f(x, y, t)$ en $w(x, y)$ et t comme nous l'avons fait pour le problème à une

dimension, on trouve:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \beta^2 w = 0 \qquad (1)$$

avec

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \mu(x,y)\, h - k}{D} \qquad (2)$$

Pour trouver la solution générale de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus, essayons d'appliquer la transformation finie de Fourier à deux variables. La transformation b_{mn} de $w(x,y)$ sera donnée par:

$$\mathcal{F}_{w(x,y)} = b_{mn} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^a \int_0^b e^{-im\frac{\pi x}{a}}\, e^{-in\frac{\pi y}{b}}\, dx\, dy$$

La transformation inverse sera définie par:

$$\mathcal{F}^{-1}_{b_{mn}} = w(x,y) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{mn}\, e^{im\frac{\pi x}{a}}\, e^{in\frac{\pi y}{b}}$$

L'équation (1) devient alors:

$$\pi^4 \left\{ \left[\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} \right]^2 + \frac{k - \mu\omega^2 h}{D} \right\} b_{mn} - \frac{\omega^2 h}{ab\,D}\, \mathcal{F}_{M\,\delta(p-p)} * \mathcal{F}_w = 0$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de la propriété de la singularité fondamentale:

$$\pi^4 \left\{ \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 + \frac{k - \mu\omega^2 h}{D} \right\} b_{mn} \frac{\omega^2 h}{Dab} \sum_{p=m} \sum_{q=n} e^{ip\frac{\pi x}{a}}\, e^{iq\frac{\pi y}{b}}\, b_{p-m,q-n} \qquad (3)$$

Mais, $e^{ip\xi} = e^{i(p-m)\xi + im\xi}$ et $e^{iq\eta} = e^{i(q-n)\eta + iq}$

et en utilisant les coordonnées réduites:

$\xi = \pi x/a$, $\eta = \pi y/b$, $\bar{\xi} = \pi X/a$, $\bar{\eta} = \pi Y/b$, il vient:

$$\sum_{p-m} \sum_{q-n} e^{i(p-m)\bar{\xi}} e^{i(q-n)\bar{\eta}} e^{im\bar{\xi}} e^{in\bar{\eta}} b_{p-m,q-n} = A\, e^{im\bar{\xi}} e^{in\bar{\eta}}$$

$$A = \sum_{p-m}^{+\infty} \sum_{q-n}^{+\infty} e^{i(p-m)\bar{\xi}} e^{i(q-n)\bar{\eta}} b_{p-m,q-n} \qquad \alpha^2\pi^4 = \beta^2$$

$$\sigma = \frac{M\omega^2 h}{ab\,D}$$

par analogie avec les notations utilisées pour l'étude des poutres. Finalement on obtient:

$$b_{mn} = \sigma A \frac{e^{im\bar{\xi}}\, e^{in\bar{\eta}}}{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]^2 - \alpha^2} \tag{4}$$

La transformation inverse de b_{mn} donnera w:

$$w = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma \frac{e^{im\bar{\xi}}\, e^{in\bar{\eta}}\, A}{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]^2 - \alpha^2} e^{im\xi}\, e^{in\eta} \tag{5}$$

La solution générale de (1) ne présente donc pas de difficulté, et peut être trouvée par les intégrales de Fourier.

Lorsque l'on a affaire à un problème aux limites, où w(x, y) doit satisfaire en plus à un certain nombre de conditions aux limites, il faudra donc, comme nous l'avons fait pour les poutres, introduire des masses fictives dont les positions et les intensités seront déterminées de manière à satisfaire à ces conditions.

Au sujet du nombre de masses fictives à faire intervenir, ce que nous avons dit dans la première partie de ce travail est encore valable pour les plaques puisque ce sont les mêmes séries que l'on utilise, à l'exception toutefois de la plaque libre qui sera plus compliquée, comme nous le verrons plus loin. Nous aborderons donc tout d'abord, l'étude des plaques appuyées sur leur pourtour et "guidées-encastrées" puisque nous avions vu que dans le cas des poutres, le problème était plus aisé à résoudre que les suivants.

A première vue, la plaque guidée-encastrée présente des conditions aux limites qui ne paraissent pas avoir, par elles-mêmes, l'intérêt de leur homologue unidimensionnel, car la réalisation voulue de ces conditions ne se rencontre pas dans la technique. Mais il se trouve que des plaques que l'on désire encastrées, le soient imparfaitement, et que l'on soit précisément en présence du cas mentionné. D'autre part, nous verrons plus loin que la solution de la plaque "guidée-encastrée" sera utilisée pour en déterminer celle de la plaque libre.

B. - PLAQUE APPUYEE SUR SES BORDS. PLAQUE "GUIDEE-ENCASTREE"

Nous avions vu que pour déterminer les fréquences propres des poutres sur appuis et "guidées-encastrées" il y avait lieu de faire intervenir une masse fictive d'intensité $\pm M$, à l'abscisse $4l - X$. Il semble donc logique d'utiliser un procédé analogue pour trouver les fréquences propres des plaques sur appuis et "guidées-encastrées".

Nous reprendrons comme axes de coordonnées ceux utilisés précédemment; soit la plaque de côté a, b soumise à une masse M d'abscisse X, et d'ordonnée Y, et à une masse fictive de même intensité, en un point (2a - X, 2b - Y). (Voir figure 16).

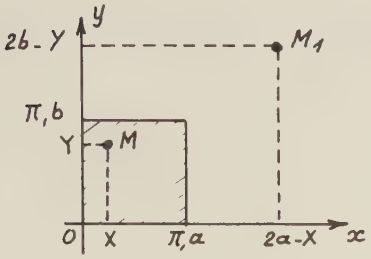


Figure 16.

En faisant intervenir une telle masse, et en passant aux nombres rééls, les équations (4) et (5) deviendront:

$$b_{m,n} = \frac{\sigma A \cos m\bar{\xi} \cos n\bar{\eta} \pm B \sin m\bar{\xi} \sin n\bar{\eta}}{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]^2 - \alpha^2}$$

où l'on a posé:

$$A = \sum_m \sum_n \cos m\bar{\xi} \cos n\bar{\eta}\ b_{mn},$$

$$B = \sum_m \sum_n \sin m\bar{\xi} \sin n\bar{\eta}\ b_{mn}.$$

Les séries impaires seront nulles puisque m et n vont de $-\infty$ à $+\infty$; les fonctions propres seront:

$$w(\xi,\eta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{Z}(m,n) \left[A \cos m\bar{\xi} \cos n\bar{\eta} \cos m\xi \cos n\eta \pm B \sin m\bar{\xi} \sin n\bar{\eta} \sin m\xi \sin n\eta\right] \qquad (7)$$

$$\mathfrak{Z}(m,n) = \frac{1}{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]^2 - \alpha^2}$$

Les conditions d'identification seront au nombre de deux; on les obtiendra en multipliant successivement par $\cos m\bar{\xi}\ \cos n\bar{\eta}$ et $\sin m\bar{\xi}\ \sin n\bar{\eta}$ chaque membre de (6) et en sommant termes à termes:

$$A = \sigma \sum_m \sum_n z(m,n) \left[A \cos^2 m\bar{\xi}\ \cos^2 n\bar{\eta} \pm B \cos m\bar{\xi}\ \cos n\bar{\eta} \sin m\bar{\xi}\ \sin n\bar{\eta} \right] \quad (8)$$

$$B = \sigma \sum_m \sum_n z(m,n) \left[A \cos m\bar{\xi}\ \cos n\bar{\eta}\ \sin m\bar{\xi}\ \sin n\bar{\eta} \pm B \sin^2 m\bar{\xi}\ \sin^2 n\bar{\eta} \right]$$

1. - PLAQUE APPUYEE SUR SES BORDS.

a) Cas d'une seule masse réelle.

Le moment fléchissant le long du pourtour d'une telle plaque et la déformée sont nuls (Figure 16). Donc si ν est le coefficient de Poisson:

$$w(0,y) = w(a,y) = w(x,0) = w(x,b) = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=0} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=b} = 0$$

Dans ces relations, toutes les sommes où interviendra $\sin m\pi$ (ce qui aura lieu pour x=a, ou y=b) seront nulles, et on en déduit que si A est également nul, toutes les conditions aux limites seront satisfaites. La solution prendra la forme:

$$w = 4\sigma B \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(m,n) \left[\sin m\bar{\xi}\ \sin n\bar{\eta}\ \sin m\xi\ \sin n\eta \right] \quad (9)$$

en utilisant les coordonnées réduites:

$z(m,n)$ est donné par:

$$z(m,n) = \frac{1}{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 - \alpha^2}$$

La seconde condition aux limites [1], donne l'équation aux valeurs propres:

$$-1/4\,\sigma = \sum_m \sum_n z(m,n)\,\sin^2 m\bar{\xi}\,\sin^2 n\bar{\eta} \qquad (9a)$$

Remarque:

Si la plaque n'est pas chargée ($\sigma = 0$) cela entraine :

$$\alpha^2 = \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]^2 \qquad (10)$$

Dans ce cas particulier les fréquences propres sont:

$$N = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{D}{\mu h}\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]^2 - \frac{k}{4\mu h}} \qquad (11)$$

$D\,[p^2+q^2]^2$ devient grand devant k et il s'ensuit que la fondation élastique intervient de moins en moins à mesure que le spectre augmente en fréquence. Pour les fréquences aiguës, la plaque peut être considérée comme libre (sans fondation élastique: k tend vers 0). Si k=0, les fréquences propres, en tenant compte de la valeur de $\alpha^4 D = -\mu\omega^2 h$ seront:

$$N = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{D}{\mu h}} \cdot \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right] \qquad (12)$$

On retrouve l'expression des fréquences propres d'une plaque rectangulaire appuyée sur son pourtour.[2].

Nous ne pouvons pas mettre (9a) sous forme finie, et sa discussion semble délicate. Il est possible cependant de se rendre compte de l'effet de la masse M sur les fréquences propres, en prenant deux cas particuliers correspondant à la plaque carrée a=b:

1°) la masse M est appliquée au centre de la plaque: X=Y=a/2.
2°) la masse M est appliquée au quart de la plaque : X=Y=a/4.

Si l'on porte en abscisse les valeurs propres α , et en ordonnée le second membre (fonction à allure de fonctionscirculaires) et le premier membre (fonction hyperbolique), les abscisses des points d'intersection de ces courbes seront solution de (9a).

La masse nulle et infinie c'est à dire ce qui correspond aux asymptotes et aux zéros du second membre de (9a) détermineront la plage de variation de la suite des fréquences propres. Le calcul donne pour ces deux cas particuliers:

1°) $X = Y = a/2$ ou $\bar{\xi} = \bar{\eta} = \pi/2$,

$M=\infty$ $\alpha = 2 \quad 10 \quad 18 \quad 26 \quad 34 \quad 50.$

$M=0$ $\alpha = 7 \quad 14,8 \quad 23,1 \quad 30,3 \quad 42,8$

2°) $X = Y = a/4$ ou $\bar{\xi} = \bar{\eta} = \pi/4$

$M=\infty$ $\alpha = 2 \quad 5 \quad 8 \quad 10 \quad 13$

$M=0$ $\alpha = 3,8 \quad 6,7 \quad 9,1 \quad 11,6$

Conformément à ce que nous avons écrit plus haut, les fréquences propres N seront liées aux valeurs propres α par:

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D\alpha^2}{a^4\mu h} - \frac{k\pi^4}{\mu h}} \tag{13}$$

La figure 17 rend compte de ces résultats.

b) cas de deux masses.

Supposons que la plaque présente deux discontinuités de masse M_1, σ_1, X_1, Y_1, $\bar{\xi}_1$, $\bar{\eta}_1$ et M, σ, X, Y, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$.

Les conditions d'identification seront:

$$A' = \sum_m \sum_n \zeta \left[\sigma A' \sin^2 m\bar{\xi} \sin^2 n\bar{\eta} + \sigma_1 B \sin m\bar{\xi} \sin n\bar{\eta} . \sin m\bar{\xi}_1 \sin n\bar{\eta}_1\right] \tag{14}$$

$$B' = \sum_m \sum_n \zeta(m,n)\left[\sigma_1 B' \sin^2 m\bar{\xi}_1 \sin^2 n\bar{\eta}_1 + \sigma A' \sin m\bar{\xi} \sin m\bar{\xi}_1 \sin n\bar{\eta} \sin n\bar{\eta}_1\right]$$

avec:

$$\zeta(m,n) = \left[\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]^2 - \alpha^2\right]^{-1}$$

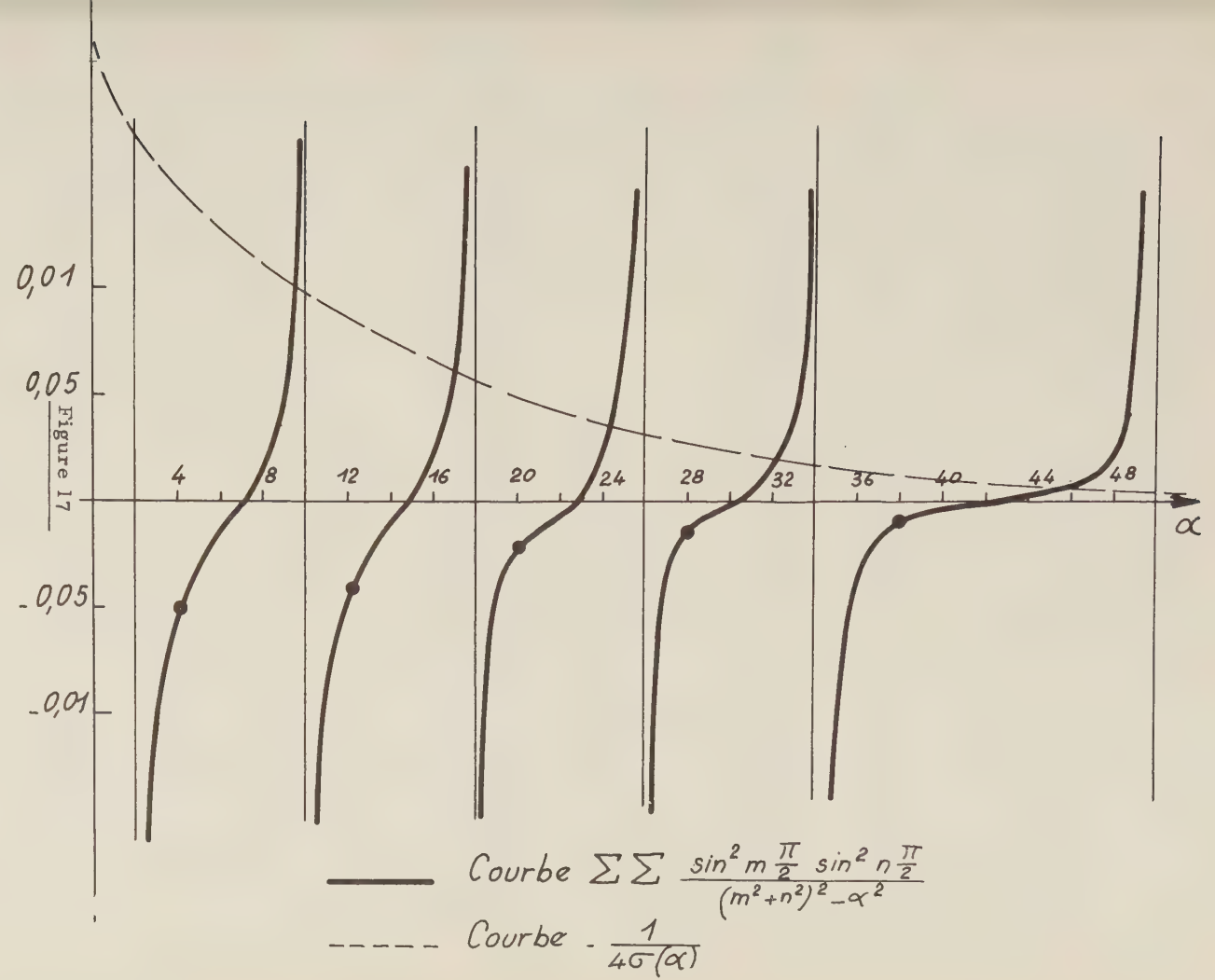

0,01
0,05
-0,05
-0,01
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
44
48
α
Courbe $\sum\sum \frac{\sin^2 m\frac{\pi}{2}\ \sin^2 n\frac{\pi}{2}}{(m^2+n^2)^2-\alpha^2}$
Courbe $-\frac{1}{4\sigma(\alpha)}$

Figure 17

Le déterminant de ces deux équations donneral'équation aux valeurs propres. En posant:

$$U(\xi,\eta,x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta \sin m\xi \sin mx \sin n\eta \sin ny \qquad (15)$$

on trouve:

$$\left[1 - \sigma\, U(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\xi},\bar{\eta})\right]\left[1 - \sigma_1\, U(\bar{\xi}_1,\bar{\eta}_1,\bar{\xi}_1,\bar{\eta}_1)\right] = \sigma\sigma_1 U^2(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\xi}_1,\bar{\eta}_1) \qquad (16)$$

expression analogue à celle que nous avions trouvée pour les poutres mais qui ne peut se mettre sous forme finie. Dans le cas particulier où l'une des deux masses s'annulle, on retombe bien sur l'équation (9a).

2. - PLAQUE "GUIDEE-ENCASTREE".

Nous garderons toujours comme expression des b_{mn} celle de (6), ainsi que les conditions identiques (8).

La première condition aux limites est celle de pente nulle sur le pourtour. En ce qui concerne l'effort tranchant, nous pensons qu'on peut appliquer à ce cas le raisonnement de Kirchhoff [2] relatif à la plaque libre; on peut ainsi admettre que l'annulation de l'effort tranchant et du moment de torsion s'exprimera par une condition unique:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0$$

En définitive les conditions seront donc:

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=a} = 0 \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=0} = \left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=b} = 0 \qquad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=a} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{y=b} = 0$$

Ecrivons ces relations en tenant compte de (7) et de (8); il vient B=0, soit la solution w:

$$w = 4\sigma A \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos m\bar{\xi} \cos n\bar{\eta} \cos m\xi \cos n\eta \qquad (18)$$

et l'équation aux valeurs propres:

$$-\frac{1}{4\sigma} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 m\bar{\xi} \cos^2 n\bar{\eta}}{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]^2 - \alpha^2} \qquad (19)$$

Pour les deux cas particuliers que nous avons pris précédemment lorsque l'on a étudié la plaque appuyée, les zéros des courbes $f(\alpha)$ définies antérieurement deviennent:

$\alpha =$ 4 8 16 20 pour X = Y = a/2

$\alpha =$ 2 10 18 26 34 pour X = Y = a/4

Le cas de plusieurs masses peut se traiter de la même façon.

La plaque appuyée sur ses bords ou "guidée-encastrée" ne présente donc pas de difficulté théorique; nous pourrions déterminer les figures des lignes nodales pour chaque mode, mais la détermination effective des valeurs exige des calculs que nous n'avons pas jugé utile de faire.

C. - PLAQUE LIBRE.

Nous nous proposons d'appliquer la méthode des masses fictives à une plaque libre présentant des discontinuités de masse. Si l'on ne fait pas intervenir de masses fictives, la solution générale (5) ne peut convenir aux conditions aux limites du problème, ce qui n'est pas surprenant puisque la poutre libre a été traitée à l'aide d'une masse fictive. En fait, de nombreux auteurs se sont attaqués au problème des vibrations de la plaque libre sans pouvoir en donner de solutions autres qu'approchées. La première et la seule solution exacte, à notre connaissance, est celle d'Iguchi (1953); celle-ci procède par développements en séries suivant des fonctions satisfaisant à l'une des conditions aux limites, et elle conduit à des expressions extrêmement compliquées. [3]. Nous allons proposer dans ce qui suit une solution qui sera une extension naturelle de la méthode des masses fictives utilisée dans les chapitres précédents, et qui mène, à ce qu'il nous semble, à des expressions beaucoup plus simples. On verra que, parti qu'un point de vue très différent de celui d'Iguchi, nous sommes cependant amené à procéder d'une façon analogue à la sienne, la principale différence consistant finalement dans le remplacement des séries par des intégrales curvilignes.

Pour introduire la méthode de résolution, qui sera exposée plus loin, nous ferons une brève présentation d'un problème discontinu approchant le problème réél, un peu comme dans la méthode de Bernouilli pour traiter les vibrations d'une corde à partir de celles d'une file de masses ponctuelles.

Considérons donc une plaque que nous supposerons (pour simplifier l'écriture, sans rien sacrifier de la généralité) carrée et de côté π. Par raison de symétrie il suffira de se préocuper d'un quart de la plaque, constituée par le carré $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

Le centre de la plaque est pris comme origine des coordonnées (fig. 18). Soient X_j, Y_j les coordonnées de la masse M_j (à laquelle correspondent ses images à travers les axes ox et oy), qui peut être appliquée à l'intérieur ou à l'extérieur du carré réél de côté $\pi/2$. La transformation de Fourier conduira à la détermination de b_{mn}:

$$b_{mn} = \sigma_1 A_1 f_1 + \cdots + \sigma_j A_j f_j + \cdots + \sigma_1 B_1 g_1 + \cdots + \sigma_j B_j g_j \qquad (20)$$

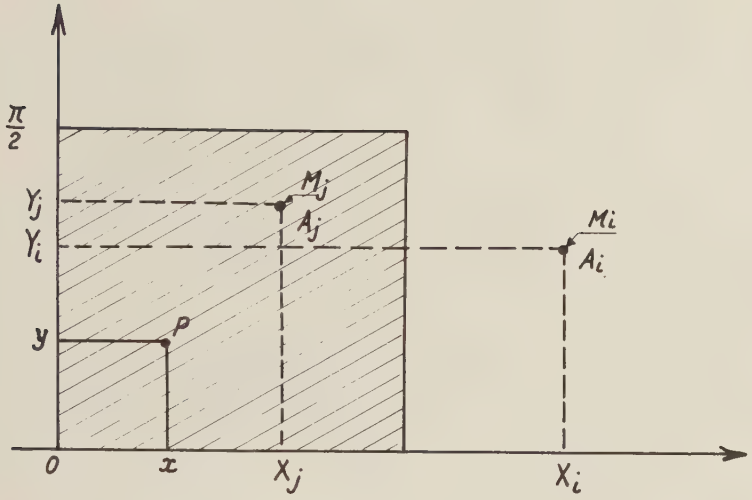


Figure 18

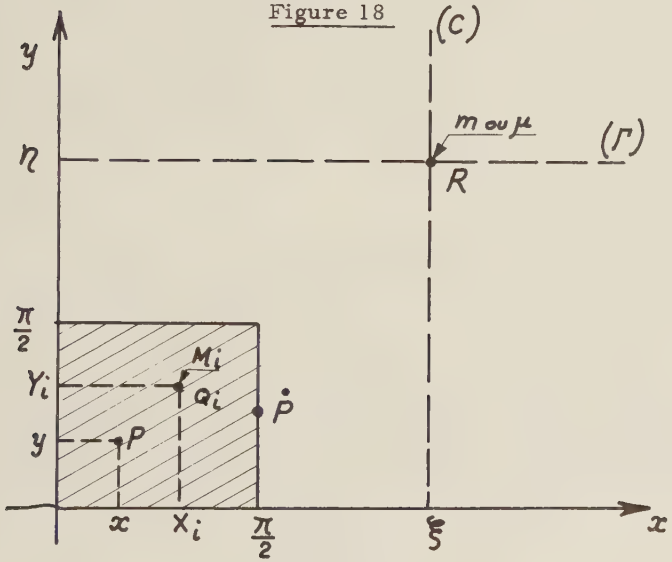


Figure 19

en posant: $f_1 = \cos mX_1 \cos nY_1 \qquad g_1 = \sin mX_1 \sin nY_1$

$$A_1 = \sum_{m,n} b_{mn} f_1 \qquad B_1 = \sum_{m,n} b_{mn} g_1$$

Les sommes impaires étant nulles, il vient pour la solution générale w (x, y):

$$w = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(\sigma_1 A_1 f_1 + \sigma_1 B_1 g_1 + \ldots\ldots) (\cos mx \cos ny - \sin mx \sin ny)$$

Les conditions d'identification qui déterminent les A_j et B_j sont données par:

$$A_1 = A_1 \sum f_1^2 z + \ldots + A_j \sum z f_1 f_j + B_1 \sum z f_1 g_1 + . + B_j \sum z f_1 g_j$$

$$A_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_j = A_1 \sum f_1 f_j z + \ldots + A_j \sum z f_j^2 + B_1 \sum z f_j g_1 + .. + B_j \sum z f_j g_j$$

$$B_1 = A_1 \sum f_1 g_1 z + \ldots + A_j \sum z f_1 g_1 + B_1 \sum z g_1^2 + \ldots + B_j \sum z g_j g_1$$

$$B_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_j = A_1 \sum z f_1 g_j + \ldots + A_j \sum z f_j g_j + B_1 \sum z g_1 g_j + \ldots + B_j \sum z g_j^2$$

A ces conditions, il faut adjoindre les conditions aux limites, qui sont au nombre de quatre. La première de ces conditions annule le moment fléchissant, la seconde se réduit à la condition de Kirchhoff qui tient compte de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Nous n'avons pris que le quart de la plaque, et les conditions aux limites relatives aux bords négatifs de la plaque seront confondues avec celles correspondant aux bords positifs.

Compte tenu de cette observation, ces conditions se réduiront donc à:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{y=\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{y=\frac{\pi}{2}} = 0$$

Ces équations, explicitées, seront des fonctions de x ou de y, et pour pouvoir les annuler sans éliminer x et y, on conçoit qu'il faudra un nombre infini de masses fictives réparties par exemple sur une droite parallèle à l'un des bords de la plaque.

Reprenons maintenant la question d'un point de vue général. Nous avons affaire au problème aux limites:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & L_P u\,(P(x,y),\ Q_i(X_i, Y_i)) = 0 & \text{pour } P \in D \\ \text{II} & \mathcal{M}_{\dot{P}} u\,(\dot{P},\ Q_i) = 0 & \text{pour } P \in \dot{D},\ \text{frontière de } D \\ \text{III} & \mathcal{T}_{\dot{P}} u\,(\dot{P},\ Q_i) = 0 & " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \end{array}\right\} \quad (21)$$

Nous allons utiliser les solutions, que nous connaissons de deux problèmes aux limites plus simples, pour former à leur aide une combinaison linéaire analogue à un potentiel de simple ou double couche.

Ces problèmes auxiliaires sont celui de la plaque indéfinie, appuyée sur D, qui présenterait les mêmes discontinuités de masse M_i au point Q_i et en outre une discontinuité de masse m en un point R extérieur à D, et celui de la plaque analogue "encastrée-guidée" le long de $\dot{D}$ (fig. 19, page 78). Dans toutes ces expressions, l'opérateur différentiel L est de la forme:

$$L = \Delta\Delta + \sum_j M_j\, \delta(Q_i) .$$

Les deux problèmes aux limites auxiliaires seront définis par:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & L_P\, g(P,R,Q_i) = m\ \delta(R)\ .\ g(P,R,Q_i) \\ \text{II} & \mathcal{M}_P\, g(\dot{P},Q_i,R) = 0 \\ \text{III} & g(\dot{P},Q_i,R) = 0 \end{array}\right\} \quad (22)$$

pour la plaque appuyée et:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & L_P\, \gamma(P,R,Q_i) = \mu\, \delta(R)\, \gamma(P,R,Q_i) \\ \text{II} & \mathcal{C}_{\dot{P}}\, \gamma(\dot{P},Q_i,R) = 0 \\ \text{III} & \partial n(\dot{P},Q_i,R) = 0 \end{array}\right\} \quad (23)$$

pour la plaque "guidée-encastrée".

Toute combinaison linéaire de fonctions g (ou de fonction γ) correspondant à différents points R satisfait à l'équation (21. I); nous chercherons donc une solution de (21) sous la forme:

$$u(P,Q_i) = \int_C m(R)\, g(P,Q_i,R)\, dR + \int_\Gamma \mu(R)\ \gamma(P,Q_i,R)\, dR$$

La première de ces intégrales satisfait à $\mathcal{M}_{\dot{P}} = 0$ et la seconde à $\mathcal{C}_{\dot{P}} = 0$, de sorte que les équations (21. II) et(21. III) se réduisent à:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & m(R) \int_C \mathcal{C}_{\dot{P}}\, g(P,Q_i,R)\ dR = 0 \quad \text{et} \\ \text{II} & \mu(R) \int_\Gamma \mathcal{M}_{\dot{P}}\, \gamma(P,Q_i,R)\ dR = 0 \end{array}\right\} \quad (24)$$

Les calculs sont identiques pour les deux intégrales, et nous nous contenterons d'indiquer la solution en ce qui concerne la densité de masse m par exemple. D'après les résultats du chapitre précédent (IV. B. 1), g(x, y) peut s'écrire sous forme d'un développement tel que:

$$g = \sum_{i,j,k} M_i\ .\ \frac{\varphi_k(Y_i)\,\varphi_j(X_i)\,\varphi_j(x)\,\varphi_k(y)}{(j^2+k^2)^2 - \alpha^2} - m \sum_{j,k} \frac{\varphi_j(\xi)\,\varphi_k(\eta)\,\varphi_j(x)\,\varphi_k(y)}{(j^2+k^2)^2 - \alpha^2} \quad (25)$$

1. - PAS DE MASSE REELLE.

Pour plus de simplicité, traitons d'abord le cas où il n'y a pas de discontinuité de masse réelle ($M_i=0$). Il reste alors, pour l'expression de g:

$$g(P,R) = m(\xi,\eta) \sum_{jk} \frac{\varphi_j(\xi)\varphi_k(\eta)\varphi_j(x)\varphi_k(y)}{D_{jk}(\alpha)}$$

et:

$$\mathcal{C}_p g\,(x=0,\ y,\ \xi,\ \eta) = \sum_{jk} m \frac{t_{jk}\varphi_j(\xi)\varphi_k(\eta)\varphi_j'''(0)\varphi_k(y)}{D_{jk}(\alpha)}$$

Les expressions t_{jk}, φ_j, φ_k D_{jk}, données explicitement dans les paragraphes précédents ne seront calculées que lorsqu'il sera nécessaire.

Nous pouvons prendre pour contour C le segment de droite parallèle à un bord de la plaque, soit: $\eta = C^{te} = \eta_0 - \pi(-a) < \xi < +\pi(+a)$. Développons m qui devient fonction uniquement de ξ, en série de $\varphi(\xi)$:

$$m = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} m_s \varphi_s(\xi)$$

La condition (24. I) devient alors:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \Big[\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{m_s t_{jk} \varphi_j'''(0)\varphi_k(y)\varphi_k(\eta_0)\varphi_j(\xi)\varphi_s(\xi)}{D_{jk}(\alpha)} \Big] d\xi = 0$$

soit:

$$\sum_s \sum_j \sum_k \frac{m_s t_{jk}\varphi_j'''(0)\varphi_k(\eta_0)\varphi_k(y)}{D_{jk}(\alpha)} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_j(\xi)\varphi_s(\xi)\,d\xi = 0$$

L'intégrale est nulle pour j différent de s, et sera égale à π pour j=s, puisque les φ sont des fonctions trigonométriques orthogonales dans l'intervalle de 2π. En effet:

$$\int_0^{2\pi} \sin sx \cdot \sin tx\,dx = \pi\,\delta_{st}$$

Il reste donc:

$$\sum_k a_k \varphi_k(y) = 0 \qquad (26)$$

où:

$$a_k = \sum_j m_j \frac{t_{jk} \varphi_j'''(0) \varphi_k(\eta_0)}{D_{jk}(\alpha)} \qquad (27)$$

Pour que (26) soit vérifiée pour tout y, il faut que $a_k=0$, c'est à dire que les m_j doivent satisfaire au système linéaire homogène d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues. Il y aura donc une solution non triviale si le déterminant du système est nul, c'est à dire si:

$$\det(b_{jk}) = 0 \quad \text{où} \quad b_{kj} = \frac{t_{jk} \varphi_j'''(0) \varphi_k(\eta_0)}{D_{jk}(\alpha)} \qquad (28)$$

L'équation (28) est fonction de α et de η_0.

Nous avons donc ainsi déterminé une solution g qui satisfait à l'une des conditions aux limites en opérant sur la discontinuité m_j. Nous pourrons faire un raisonnement analogue sur les discontinuités μ_j; ceci nous conduit également à une équation du type (28) si l'on choisit, par raison de symétrie, comme contour Γ une droite parallèle à l'autre bord de la plaque à la même distance que l'on avait prise pour le contour C; cette équation sera également fonction de α et de η_0, puisque $\xi_0 = \eta_0$.

L'élimination de η_0 entre ces deux équations donne la condition à laquelle doit satisfaire α, donc l'équation aux valeurs propres du système.

Il peut arriver que si l'on choisit η_0 convenablement, l'une des deux conditions (24) sera obligatoirement vérifiée, et il ne restera plus qu'à écrire la seconde qui donne:

$$\det b_{kj}(\alpha, \eta_0) \text{ où } \eta_0 \text{ est donné.}$$

Nous avons ainsi la possibilité d'obtenir assez rapidement deux classes particulières sans être obligé d'éliminer η_0 ; celles-ci correspondront aux modes propres dans lesquels ν n'intervient pas, conformément aux travaux de Ritz et Iguchi.

2. - UNE MASSE REELLE.

Nous supposerons la masse réelle M appliquée au point Q(X, Y). L'expression complète de g (P, R), compte tenu des résultats obtenus précédemment, est de la forme:

$$g = m A \sum_{jk} \frac{\varphi_j(\xi)\,\varphi_k(\eta)}{D_{jk}(\alpha)}\,\varphi_j(x)\,\varphi_k(y) + M B \sum_{jk} \frac{\varphi_j(x)\,\varphi_k(Y)}{D_{jk}(\alpha)}\,\varphi_j(x)\,\varphi_k(y) \qquad (29)$$

où les constantes A, B sont données par:

$$A = \sum_{jk} \varphi_j(\xi)\,\varphi_k(\eta)\,b_{jk} \qquad B = \sum_{jk} \varphi_j(X)\,\varphi_k(Y)\,b_{jk}$$

mais, si l'on tient compte de la valeur de b_{jk} déterminée à l'aide de (29) et de:

$$g = \sum_{jk} b_{jk}\,\varphi_j(x)\,\varphi_k(y)$$

il vient:

$$B = m A \sum_{jk} \frac{\varphi_j(\xi)\,\varphi_k(\eta)\,\varphi_j(X)\,\varphi_k(Y)}{D_{jk}(\alpha)} + M B \sum_{jk} \frac{\varphi_j^2(X)\,\varphi_k^2(Y)}{D_{jk}(\alpha)} \qquad (30)$$

L'expression finale de g semble assez compliquée, et en utilisant les mêmes notations que précédemment, il vient pour l'effort tranchant:

$$\mathcal{T}_g = m A \sum_{jk} \frac{b_{jk}\,\varphi_j(\xi)\,\varphi_k(\eta)}{D_{jk}(\alpha)}\,\varphi_j(0)\,\varphi_k(y) + M A \frac{\sum_{jk} \frac{\varphi_j(\xi)\,\varphi_k(\eta)\,\varphi_j(X)\,\varphi_k(Y)}{D_{jk}(\alpha)} \sum_{jk} \frac{b_{jk}\,\varphi_j(X)\,\varphi_k(Y)\,b_{jk}}{D_{jk}(\alpha)}\,\varphi_k(y)}{\left[1 - M \sum_{jk} \frac{\varphi_j^2(x)\,\varphi_k^2(Y)}{D_{jk}(\alpha)}\right]}$$

Les considérations que nous avons développées au début de ce paragraphe nous ont montré que pour résoudre notre problème il faudrait en réalité une infinité de masses fictives. Le principe de superposition s'applique, l'expression de $\mathcal{T}_g$ étant linéaire en m, et on aura alors une solution

de la plaque en prenant: $m=\sum_s m_s \varphi_s(\xi)$, et en intégrant pour un η_o constant le long du contour C, qui devient une droite.

$$\sum_{jks} \frac{m_s \varphi_k(\eta_o) t_{jk} \varphi_j(o) \varphi_k(y)}{D_{jk}} \int_C \varphi_j(\xi)\varphi_s(\xi)\,d\xi + M \cdot \frac{\sum_{jk} \frac{\varphi_j(x)\varphi_k(y) t_{jk}}{D_{jk}} \varphi_j(o)\varphi_k(y)}{\left[1 - M \sum_{jk} \frac{\varphi_j^2(x)\varphi_k^2(y)}{D}\right]} \sum_{jks} m_s \frac{\varphi_k(\eta_o)\varphi_j(x)\varphi_k(y)}{D} \int_C \varphi_j(\xi)\varphi_k(\xi)\,d\xi \quad (31)$$

Les intégrales ont des valeurs particulières π pour s=k, et on aura:

$$\sum_{jk} m_j \frac{\varphi_k(\eta_o)\, t_{jk} \varphi_j(o) \varphi_k(y)}{D_{jk}} + e(M,x,y,\alpha) \sum_{jk} m_j \frac{\varphi_j(x)\varphi_k(y) t_{jk}}{D_{jk}} \varphi_k(y) \sum_{jk} \frac{\varphi_k(\eta_o)\varphi_j(x)\varphi_k(y)}{D_{jk}} = 0$$

en posant:

$$e = \sum_{jk} \frac{M}{\left[1 - M \sum \frac{\varphi_j^2(x)\varphi_k^2(y)}{D_{jk}}\right]} \qquad f = e \sum_{jk} \frac{\varphi_k(\eta_o)\varphi_j(x)\varphi_k(y)}{D_{jk}(\alpha)}$$

soit:

$$\sum m_j \frac{\varphi_k(\eta_o)\, t_{jk} \varphi_j(o)}{D_{jk}} \varphi_k(y) + f(M,x,y,\alpha\eta_o) \sum m_j \frac{\varphi_j(x)\varphi_k(y)\, t_{jk} \varphi_j(o)}{D_{jk}} \varphi_k(y) = 0 \quad (32)$$

pour simplifier l'écriture, nous écrirons:

$$a'_k = \sum_j m_j \frac{\varphi_j(x)\varphi_k(y)\, t_{jk} \varphi_j(o)}{D_{jk}(\alpha)}$$

et en tenant compte de (27), il vient finalement:

$$\sum_k \left[a_k \varphi_k(y) + f\, a'_k \varphi_k(y)\right] = 0$$

Pour que ceci soit vérifié pour tout y, il faut que:

$$a_k + f\, a'_k = 0$$

soit encore, en revenant à la signification de a_k et a'_k :

$$\sum_j m_j \left[b_{jk} + f(M, X, Y, \alpha, \eta_o)\, b'_{kj} \right] = \sum_j m_j\, c_{jk} = 0 \qquad (33)$$

La seule solution non triviale correspond à:

$$\det (c_{jk}) = 0$$

qui est une équation $F(M, X, Y, \alpha, \eta_o) = 0$ (34)

En utilisant le même raisonnement pour μ , on obtiendra une autre équation analogue, et l'élimination de η_o entre cette dernière équation et (34) donnera en définitive l'équation aux valeurs propres:

$$G(M, X, Y, \alpha) = 0.$$

Le calcul effectif des α est fastidieux, mais semble néanmoins se prêter plus facilement à son exécution dans le cas particulier M=0, que par le procédé d'Iguchi. En effet, dans ce cas f=0 et l'équation aux valeurs propres se réduit à $\det (b_{jk}) = 0$ (qui est bien l'équation (28)).

Cette solution de principe se prêtant mal aux calculs effectifs, nous avons préféré utiliser la méthode d'approximation de Ritz dans ce qui va suivre, de façon à pouvoir comparer les résultats théoriques avec ceux qui résultent de l'expérience.

CHAPITRE V

MÉTHODE DE RITZ APPLIQUÉE AUX PLAQUES PRÉSENTANT DES DISCONTINUITÉS DE MASSE

A. - RAPPEL DE LA METHODE D'APPROXIMATION DE W. RITZ.

Si V est l'énergie potentielle d'un système élastique (flexion, torsion, force de rappel, énergie interne), T son énergie cinétique, nous savons que l'action Lagrangienne est donnée par:

$$\int I\,dt = \int (T-V)\,dt = L$$

Pour rendre I minimum, de façon à appliquer le principe de la moindre action, la méthode rigoureuse consisterait à écrire les équations d'Euler-Lagrange, ce qui donnerait l'équation régissant le mouvement du système considéré.

Dans le cas d'une plaque, si $f(x,y)$ est le déplacement à l'instant t en un point de la plaque, nous obtenons:

$$L=\iiint\left\{\frac{D}{2}\left[\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]^2+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]^2+2\nu\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]+2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right]^2\right]-\frac{h}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]^2\mu\right\}dy\,dt\,dx \qquad (35)$$

où D est la rigidité élastique et ν le coefficient de Poisson. Cette intégrale doit être stationnaire, d'où l'équation d'Euler:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial I}{\partial f''_{x^2}}\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial I}{\partial f''_{y^2}}\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial I}{\partial f'_t}\right]+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{\partial I}{\partial f''_{xy}}\right]=0$$

Après avoir séparé les variables x, y et t en posant $f=w\,e^{i\omega t}$, il vient:

$$\Delta\Delta w - \lambda w = 0 \qquad \text{où } \lambda = 4D\pi^2\omega^2 \tag{36}$$

C'est l'équation à partir de laquelle nous avons appliqué la méthode des masses fictives aux problèmes à deux dimensions.

Supposons maintenant, ce qui est le cas de la plaque libre, que la solution générale d'une telle équation ne puisse satisfaire aux conditions aux limites de façon rigoureuse. Nous pouvons faire une approximation sur la solution en appliquant le procédé d'Iguchi [3] ou utiliser la méthode précédemment exposée. W. Ritz utilise un procédé tout différent: il calcule l'action Lagrangienne de la plaque et fait une approximation sur l'application du principe d'Hamilton, c'est à dire quand il veut rendre I minimum. Pour cela, il choisit arbitrairement des fonctions ψ_n et écrit que la solution w_n et ses dérivées successives sont données sous forme de combinaisons linéaires des ψ_n en nombre fini:

$$w_n = \sum_{n}^{N} C_n \; \psi_n \qquad n=1,\ 2,\ \ldots\ldots\ N$$

L'énergie du système devient alors une fonction $I(w_n)=I(C_1,\ldots.\,C_n)$ aux N paramètres C_N; le principe de la moindre action donne un système de N équations aux C_n:

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,N)$$

D'où les C_i et par conséquent w_n. On conçoit que plus N est grand, meilleure est l'approximation; nous ne discuterons pas ici cependant de la convergence [4] de cette méthode, lorsque N tend vers l'infini.

Pour le problème des vibrations propres de plaques libres, Ritz prend pour ψ_n le produit de deux fonctions propres de la poutre libre de façon à pouvoir séparer les x et y:

$$\psi_{mn}(x,y) = u_m(x)\ \ u_n(y)$$

On est ainsi sûr de satisfaire aux conditions aux limites du problème (exception faite toutefois des quatre sommets de la plaque); la théorie générale

conduit d'ailleurs à considérer que la frontière du domaine doit avoir une normale unique en chaque point, de sorte que les sommets d'un rectangle apparaissent comme des points singuliers, et que, dans la théorie du potentiel, on arrondit le rectangle en remplaçant le voisinage immédiat de chaque sommet par un petit cercle dit cercle de Liapounoff.

Dans ce cas w_n sera donnée par:

$$w_n = \sum A_{mn}\ u_m(x)\ u_n(y).$$

Après intégration, pour trouver l'expression de I on obtient:

$$I = (a_{mn}^{mn} - \lambda)\, A_{mn}^2 + 2\, A_{mn}\, A_{pq}\, a_{mn}^{pq} \qquad (37)$$

où a_{mn}^{pq} sont des coefficients formés par les différentes quadratures intervenant dans (35). On doit écrire que $\partial I/\partial A_{mn} = 0$, pour exprimer que la variation première de l'énergie totale est nulle, ce qui conduit au système:

$$\begin{aligned}
&A_{oo}(a_{oo}^{oo} - \lambda) + A_o\ (a_{o1}^{oo}) + \ldots\ldots + A_{nn}(a_{on}^{on}) = 0\\
&A_{oo}(a_{1o}^{oo}) + A_o\ (a_{11}^{oo} - \lambda) + \ldots\ldots + A_{nn}(a_{1n}^{on}) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{oo}(a_{no}^{no}) + A_o\ (a_{n1}^{no} - \quad) + \ldots\ldots + A_{nn}(a_{nn}^{nn} - \lambda) = 0
\end{aligned} \qquad (38)$$

Le déterminant de ce système donnera l'équation aux valeurs propres, et on déterminera pour chaque λ les coefficients A_{nm} en fonction de l'un d'entre eux, soit A_{ss} par exemple, espérant que, conformément à ce qui se passe habituellement dans les problèmes vibratoires, l'amplitude du premier harmonique est la plus importante. Il peut arriver que, si $u_m(x)$ et $u_n(y)$ sont quelconques, le coefficient de $A_{mn}\ A_{pq}$ dans (37) soit aussi de la forme $a_{mn}^{pq} - \lambda$; les λ interviendront dans chaque coefficient du système linéaire; or les méthodes de calcul par approximation sont beaucoup plus efficaces pour les systèmes où l'inconnue n'intervient que dans la diagonale(38). Cependant, les machines arithmétiques actuelles peuvent résoudre de tels systèmes sans difficulté si n n'est pas trop grand.

Cette méthode pourra être appliquée telle quelle au problème de la plaque libre rectangulaire avec discontinuité de masse, puisque la solution exacte du problème paraît inextricable; la discontinuité de masse interviendra dans la formation des termes de l'énergie potentielle, dont ceux d'entre eux qui n'auront pas été perturbés par l'addition de cette masse seront construits au moyen des fonctions propres des poutres libres sans discontinuité.

B. - VIBRATIONS D'UNE PLAQUE A DISCONTINUITE DE MASSE PONCTUELLE.

Soit une plaque carrée, de demi-côté a, d'épaisseur h, rapportée comme l'indique la figure 20 à deux axes de coordonnées ox et oy passant par le centre.

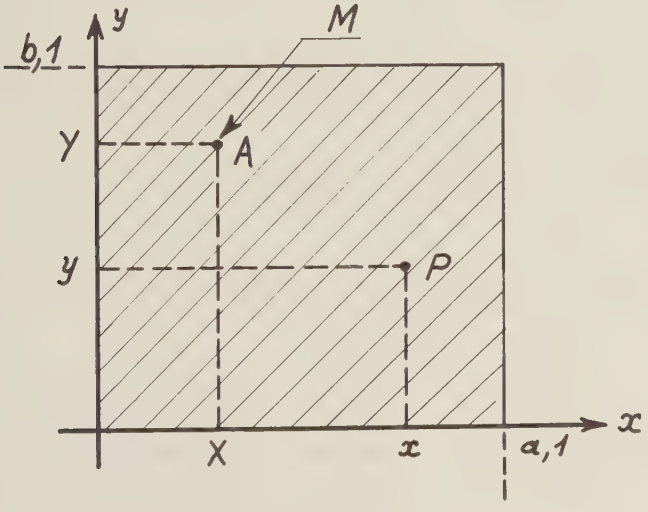


Figure 20

Nous supposerons la plaque soumise à une masse M au point A(X, Y). Nous considérerons la masse élémentaire différentielle de la surface de la plaque $\mu(x,y)$ distribuée de telle manière que:

$$\mu(x,y) = \mu + \delta[A(x,y) - P(x,y)]M$$

L'énergie totale de la plaque, conformément à (35) sera:

$$\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a}\left[\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]^2 + 2\nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]^2 + 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]^2 - \lambda\left[1 - g\,\delta(A,P)\right]w^2\right]dxdy \qquad (37')$$

où g est défini par $g = M/m$, si $m = \mu a^2$ est la masse totale de la plaque et les fréquences propres N seront reliées aux valeurs propres λ par:

$$N = \frac{h}{4\pi a}\sqrt{\frac{E\lambda}{3\mu(1-\nu^2)h}} \qquad (39)$$

Pour plus de simplification, on prendra a=1 et il ne faudra pas s'étonner si les formules ne seront pas toujours homogènes dans la suite de cet exposé.

g, terme qui représente la discontinuité de la masse est en facteur devant w^2; on sait que l'intégration, en vertu de la propriété de la singularité fondamentale conduit à:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\delta[A(X,Y) - P(x,y)]\,w^2(x,y) = w^2(X,Y)$$

à condition de prendre une origine convenable. Dans l'expression finale de I, que w(x, y) soit ou non développée en fonction propre, g aura un coefficient numérique $w^2(X, Y)$ donné, comme facteur.

Nous illustrerons la méthode en prenant deux exemples d'application, correspondant aux expériences dont il sera rendu compte plus loin: on étudiera successivement les modes de vibrations à lignes nodales ne passant par le centre de la plaque et ceux dans lesquels le centre de la plaque correspond à un nœud. La masse M sera appliquée au centre de la plaque (X=Y=0) dans le premier cas, au quart de celle-ci (X=Y=1/2) dans le second.

1. - MASSE AU CENTRE DE LA PLAQUE.

Les fonctions propres des poutres libres sont données par:

$$u_m = b_m(\mathrm{ch}\, q_m x \cos q_m + \mathrm{ch}\, q_m \cos q_m x)$$

Le centre de la plaque x=y=0, ne correspond donc pas à un nœud. Les valeurs propres q_m de la poutre libre (supposée non chargée), solutions de:

$$\mathrm{tg}\, q_m + \mathrm{th}\, q_m = 0$$

seront: $q_0 = 0$; $q_2 = 2,365$; $q_4 = 5,5$; ..... conformément à ce que nous avons dit dans le cas particulier M=0 du paragraphe II. C. 1 de la première partie. Nous développerons la solution w_{mn} en écrivant:

$$w_{mn} = \sum_{m\ n} A_{mn}\, u_m(q_m, x)\, u_n(q_n, y).$$

Le calcul des coefficients a^{pq}_{mn}, effectué en remplaçant w_{mn} par sa valeur après intégration dans l'expression (37'), compte tenu de la propriété de la singularité fondamentale, conduit à:

$$a^{pq}_{mn} = (\varphi_{mp}\, \theta_{nq} + \varphi_{nq}\, \theta_{mp}) + \nu(\omega_{mp}\, \omega_{qn} + \omega_{nq}\, \omega_{pm})$$

$$+ 2(1-\nu)\, \alpha_{mp}\, \alpha_{nq} - \lambda\, [\theta_{mp}\, \theta_{nq} + g\, u_p(X)\, u_q(Y)\, u_m(X)\, u_n(Y)]$$

où les différentes quadratures θ, φ, α, ω sont définies par:

$$\theta_{mn} = \int_{-1}^{+1} u_m u_n\, dx \qquad \varphi_{mn} = \int_{-1}^{+1} u''_m u''_n\, dx$$

$$\alpha_{mn} = \int_{-1}^{+1} u'_m u'_n\, dx \qquad \omega_{mn} = \int_{-1}^{+1} u''_m u_n\, dx$$

Les fonctions u_m et u_n sont orthogonales ($\theta_{mn} = \varphi_{mn} = 0$ pour $m \neq n$) et on peut les normer en écrivant $\theta_{mm} = 1$, ce qui donne b_m:

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 q_m + \cos^2 q_m}}$$

Les différentes quadratures auront les valeurs données par Ritz[5] pour la plaque ne présentant pas de discontinuité de masse. Tant qu'aux termes perturbés de l'énergie potentielle, c'est à dire au coefficient R de -g puisque M est appliqué au centre de la plaque, il sera de la forme:

$$R = u_m(0)\ u_n(0)\ u_p(0)\ u_q(0).$$

En tenant compte de ce que:

$u_o(0) = 1/\sqrt{2}$; $u_2(0) = 0,861$; $u_4(0) = 1$ on obtient les coefficients R successifs:

$u_o^4 = 0,25$; $u_o^3 u_2 = 0,304$; $u_o^2 u_2^2 = 0,371$

$u_o^3 u_4 = 0,354$ $u_o^2 u_2 u_4 = 0,432$; $u_o^2 u_4^2 = 0,5$

Mais $A_{mn} = A_{nm}$; nous obtenons finalement le système d'équations linéaires de la figure 21 page ci-après.

Pour résoudre ce déterminant, nous pouvons utiliser la méthode approximative classique, mais la présence des λ dans les autres termes que ceux de la diagonale rend plus long le calcul; nous avons préféré employer la méthode de l'escalier[6]. Notons que si g tend vers zéro, les solutions du déterminant sont très voisines des coefficients de la diagonale (36, 3; 303; 947; 2000); ce sont celles données par Ritz qui a utilisé cinq coefficients A_m:

$\lambda =$ 35, 75 266 941

Dans le cas général ($g \neq 0$), nous avons fait le calcul pour g=0, 25; 0, 5; 0, 75 et en ne prenant que les trois premiers termes, nous avons obtenu les résultats suivants :

$\lambda =$ 38 et 265 pour g = 0; 32 et 278 pour g = 0, 25;
32 et 267 pour g = 0, 5 31 et 262 pour g = 0, 75.

Bien que le léger décalage des fréquences (proportionnelles aux vers les graves apparaisse, il est difficile de se faire une bonne idée de la variation $g(\lambda)$, le nombre de points calculés étant insuffisant; nous avons préféré traiter le second exemple (masse au quart de la plaque) plutôt que de pousser plus loin ces calculs.

$$A_{00}\left[-0,304\,\lambda g\right]+A_{02}\left[36,3-\lambda(1+0,74g)\right]+A_{22}\left[3,3-0,452\,\lambda g\right]+A_{04}\left[-11,6-0,432\,\lambda g\right]+A_{24}\left[-6,32-1,04\,\lambda g\right]=0$$

$$A_{00}\left[-0,371\,\lambda g\right]+A_{02}\left[6,6-0,904\,\lambda g\right]+A_{22}\left[303-\lambda(1+0,5g)\right]+A_{04}\left[16-1,04\,\lambda g\right]+A_{24}\left[12,8-1,28\,\lambda g\right]=0$$

$$A_{00}\left[-0,354\,\lambda g\right]+A_{02}\left[11,6-0,432\,\lambda g\right]+A_{22}\left[8-0,52\,\lambda g\right]+A_{04}\left[947-\lambda(1+g)\right]+A_{24}\left[7,2-1,22\,\lambda g\right]=0$$

$$A_{00}\left[-0,432\,\lambda g\right]+A_{02}\left[-6,3-1,04\,\lambda g\right]+A_{22}\left[6,4-1,28\,\lambda g\right]+A_{04}\left[7,2-1,22\,\lambda g\right]+A_{24}\left[2000-\lambda(1+1,48g)\right]=0$$

$$A_{00}\left[-0,500\,\lambda g\right]+A_{02}\left[-6,96-1,22\,\lambda g\right]+A_{22}\left[93-0,742\,\lambda g\right]+A_{04}\left[-123-1,414\,\lambda g\right]+A_{24}\left[-972-1,922\,\lambda g\right]=0$$

Lignes nodales ne passant pas par le centre.

$$A_{11}\left[13,95-\lambda(1+0,141g)\right]+{}_1A_{13}\left[-32,08-0,38\,\lambda g\right]+A_{33}\left[18,6-0,255\,\lambda g\right]=0$$

$$A_{11}\left[-16,04-0,149g\lambda\right]+A_{13}\left[411,8-\lambda(1+0,51g)\right]+A_{33}\left[120-0,354\,\lambda g\right]=0$$

$$A_{11}\left[18,6-0,255\,\lambda g\right]+A_{13}\left[-240-0,708\;\;g\right]+A_{33}\left[1686-\lambda(1+0,472g)\right]=0$$

Lignes nodales passant par le centre .

Figure 21

2. - MASSE AU QUART DE LA PLAQUE.

Les lignes nodales passent par le centre de la plaque; les fonctions propres des poutres utilisées seront:

$$u_m = b_m (sh\, q_m \sin q_m x + sh\, q_m x \sin q_m).$$

Les fonctions u_m et u_n, encore orthogonales, auront pour norme:

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{sh^2 q_m + \sin^2 q_m}}$$

Les valeurs propres (q_m), solutions de tg q_m - th q_m = 0, sont:

$q_1 = 0$; $q_3 = 3,2966$; $q_5 = 7,07$; $q_m = (m + \frac{1}{4})\pi$

Le coefficient de proportionnalité R de g, dû à la perturbation amenée par la masse M au point X=Y=1/2, sera calculé à l'aide de:

$u_1 (1/2) = 0,612$; $u_3 (1/2) = 0,8256$; $u_5 (1/2) = -0,3575$.

Toujours en tenant compte de ce que $A_{mn} = A_{nm}$, on déterminera les coefficients a^{pq}_{mn} par l'équation (38). Le système linéaire ainsi obtenu est représenté également sur la figure 21 (bas de la figure). Les solutions du déterminant, calculées par la méthode de l'escalier, sont, pour les trois premiers modes:

λ = 14; 330; 1460 pour g=0,25; 9,7; 276; 1350 pour g = 0,5

270; 1320 pour g=0,75; 7,6; 275; 1350 pour g = 1.

Ces valeurs propres sont dans l'ensemble inférieures à celles trouvées par Ritz, c'est à dire à celles qui correspondent à la plaque nue:

λ = 12,43 378 1554

Les courbes théoriques correspondant à ces valeurs propres aussi bien qu'à celles du cas où X=Y=0 étudié plus haut, sont tracées sur la figure 24 ci-après qui rend compte également des résultats expérimentaux. Il semble que la masse agisse dans le même sens que pour les poutres: les fréquences propres (proportionnelles à $\sqrt{\lambda}$) sont décalées vers les graves.

La connaissance des A_{mn}, pour chaque mode, permet de déterminer les lignes nodales, qui sont représentées par la fonction $f(x, y) = 0$, soit:

$$A_{11}\, u_1(x)\, u_1(y) + \ldots\ldots\ldots + A_{33}\, u_3(x)\, u_3(y) = 0.$$

Pour chaque valeur λ_s de λ, on détermine les rapports d'amplitude $A_{ss}/A_{s\ s-1}$, $A_{ss}/A_{s-1\ s-1}$, $\ldots\ldots$ A_{ss}/A_{oo}. En prenant x = constante, les différentes valeurs de y (il y en a, en effet, plusieurs) qui annulent w sont les ordonnées des points nodaux x=constante. Le calcul est assez long, et on obtient des lignes nodales semblables à celles relatives aux plaques sans discontinuité.

En définitive, il ressort de cette étude que, lorsqu'une plaque présente des discontinuités de masse, les fréquences propres sont décalées vers les graves, les lignes nodales gardant sensiblement la même configuration. Nous avons tenu à faire la vérification expérimentale de ces conclusions.

C. - VERIFICATIONS EXPERIMENTALES.

Pour réaliser ces essais, nous avons utilisé des plaques en duralumin de 20 x 20 x 0,5cm, reposant sur une couche de caoutchouc mousse de façon à pouvoir considérer la plaque comme libre dans la bande de fréquences relativement élevées où nous opérions.

L'énergie d'excitation devait être puissante, vu la nature des plaques et à cause de l'amortissement introduit par le caoutchouc; à cet effet, le vibreur électro-magnétique Philips (type GM 5532) de force alternative $F = 3,5 \times 10^6$. Iv. dynes, a pu donner des résultats satisfaisants.

La détermination des fréquences de résonance a été effectuée avec le capteur électrostatique, dont le signal, recueilli sur l'écran d'un oscillographe, était maximum à l'instant où l'on "toppait" la fréquence à l'aide du compteur électronique.

Nous n'avons pas jugé utile de réaliser un montage très précis (il existe des méthodes interférentielles) pour déterminer le rapport d'amplitudes en chaque point de la plaque, car nous n'avons pas fait le calcul théorique correspondant à ces résultats. Nous nous sommes surtout attaché à déterminer les formes des lignes nodales même parfois imparfaitement dessinées et les fréquences propres correspondantes; le sable de Fontainebleau nous a donné satisfaction.

L'excitation avait lieu soit au centre de la plaque dans une première série d'expériences afin d'obtenir les modes à lignes nodales ne passant pas par ce point (cas I du paragraphe précédent), soit en des points voisins, déterminés souvent d'ailleurs par tâtonnements dans une seconde série d'expériences pour obtenir les modes à lignes nodales passant par le centre (paragraphe V. B. 2). La tige mobile de l'excitateur était reliée solidairement à la plaque; son ressort de compensation était réglé de telle façon qu'aucune force supplémentaire n'agisse sur la plaque. Il est naturel que ces modes d'excitation perturbent quelque peu la forme des lignes nodales, mais on ne peut obtenir les figures de la deuxième série que par une excitation disymétrique.

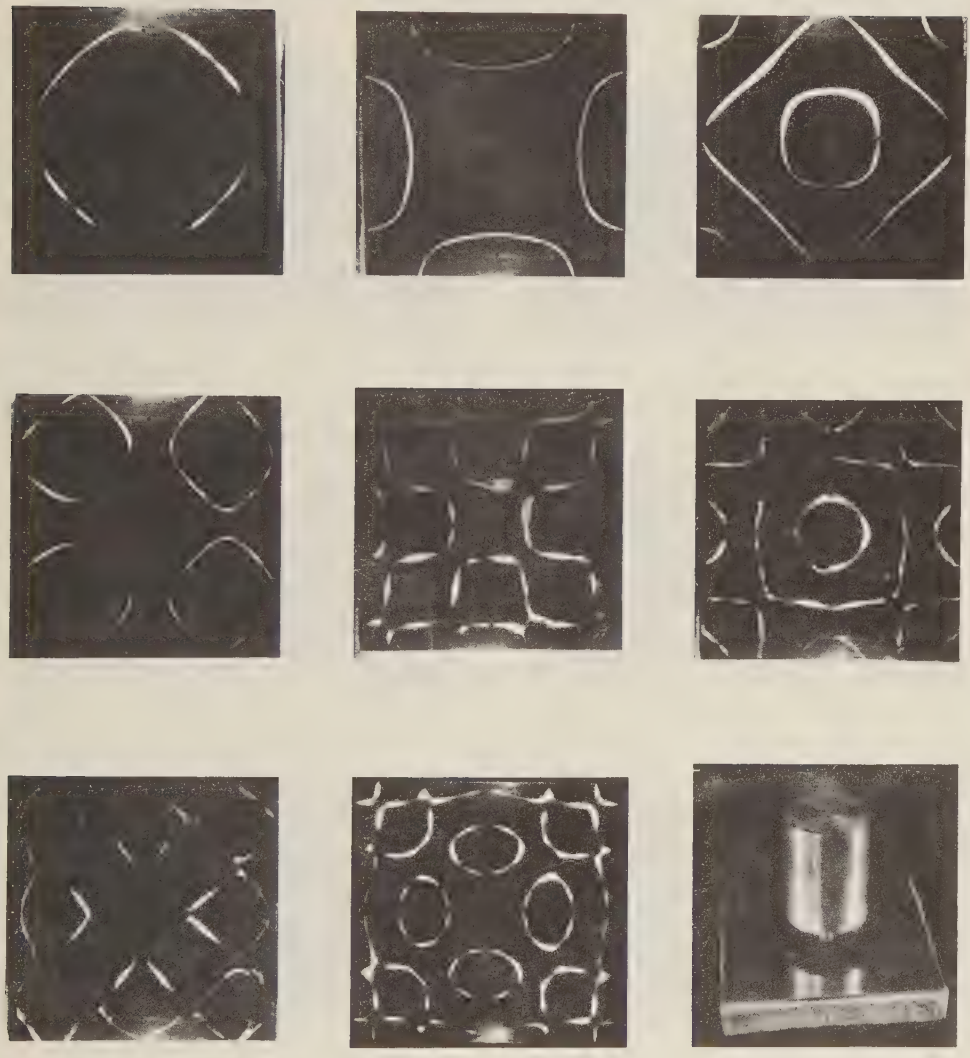
La surcharge était constituée par un petit cylindre, collé ou vissé, selon ses dimensions, à la plaque, comme le montre une des photos de la Planche I ci-après. Les résultats obtenus sont représentés sur les Planches I et II. Malgré les légères defectuosités dues:

- au polissage imparfait de la surface apparente de la plaque;
- à la présence des instruments qui gênaient la mise au point photographique;
- à la déformation du caoutchouc sous les bords de la plaque;
- à la répartition non uniforme des grains de sable avant la mise en vibration;
- au décollage de la masse additionnelle lors de la prise du cliché,

il ressort de l'examen des photos de ces deux planches que la forme des lignes nodales est identique à celle donnée par Ritz et Iguchi dans le cas où la plaque est nue; c'est ce que nous avaient fait prévoir les calculs. Il est intéressant de noter la forme particulière des lignes nodales de la dernière photo de la planche I qui, à notre connaissance , n'a pas été signalée jusqu'à présent, et semble correspondre au mode 12. Enfin, en jouant sur le ressort de compensation de l'excitateur, nous pouvions appliquer une surcharge constante connue, sans pour cela utiliser les petits cylindres; ce procédé a été employé chaque fois que la surcharge risquait de cacher les lignes nodales.

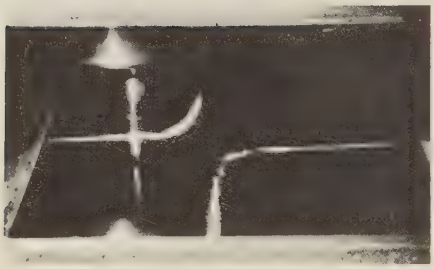
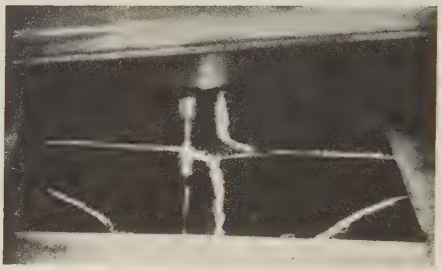
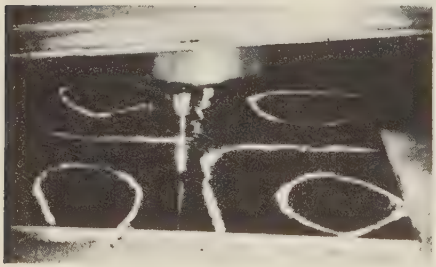
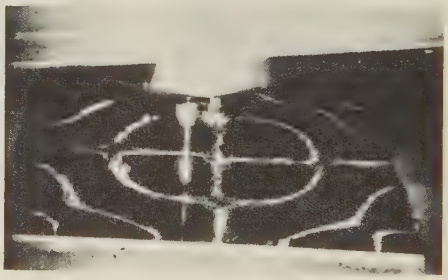
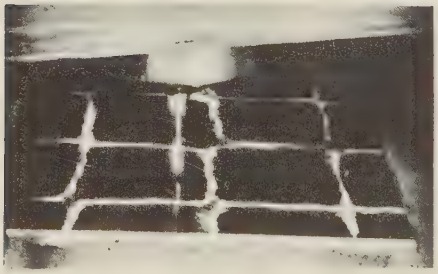
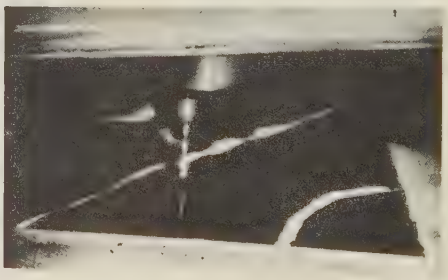
- PLANCHE I -

MASSE AU CENTRE DE LA PLAQUE.



- PLANCHE II -

MASSE AU QUART DE LA PLAQUE.

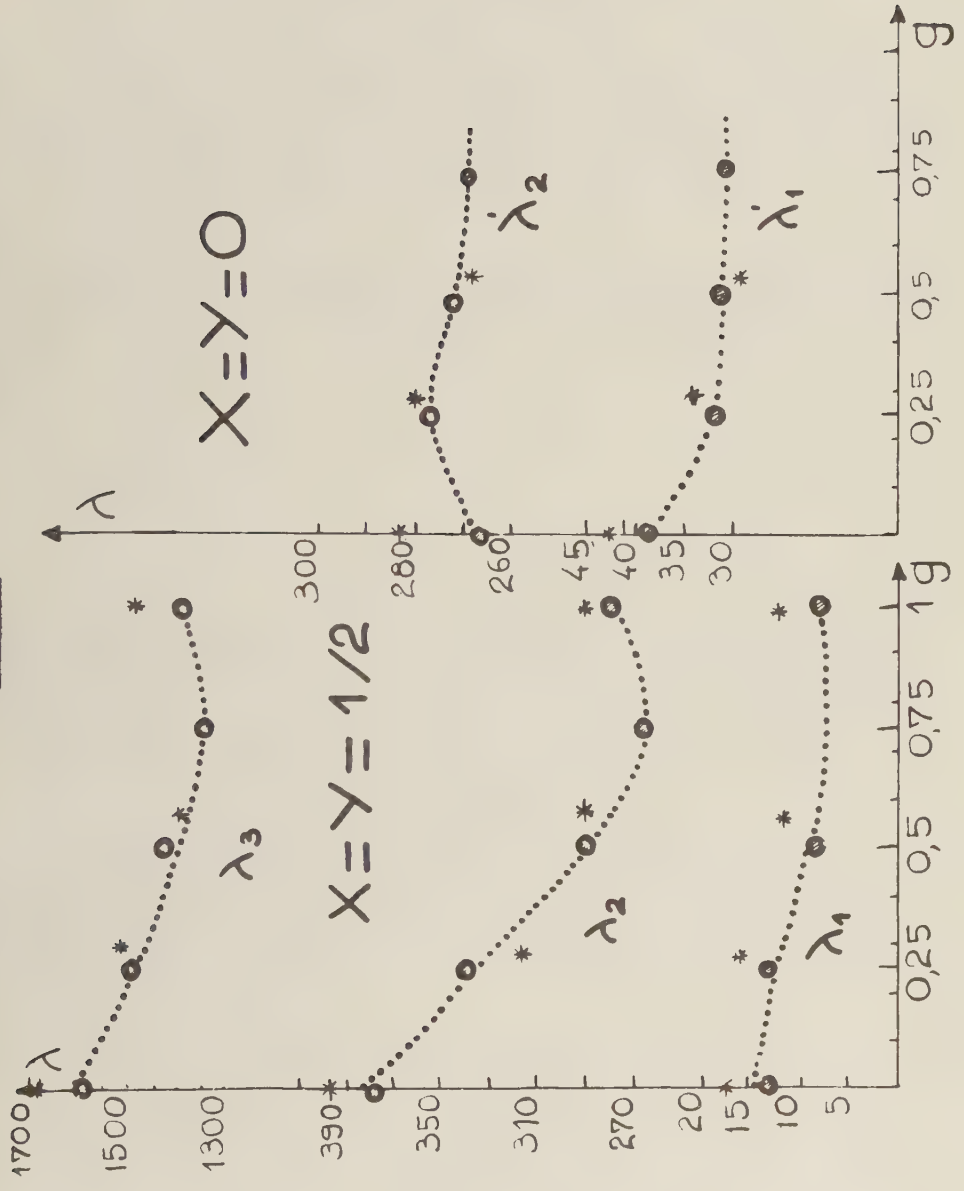

λ
X=Y=0
λ'2
λ'1
g
0,25
0,5
0,75
1
X=Y=1/2
λ3
λ2
λ1
1700
1500
1300
390
350
310
270
20
15
10
5
300
280
260
45
40
35
30

Figure 22

Tant qu'à la détermination des fréquences propres, la figure 22 rend compte des résultats obtenus pour les deux cas considérés. Les points repérés o correspondent aux valeurs théoriques, les points ✱ aux valeurs expérimentales, déduites des fréquences observées par la relation (39). Pour l'expérience, on avait choisi g aux environs de 0, 3; 0, 6; 1.

Il ressort de tous ces essais que conformément à ce que laissait prévoir la théorie, les discontinuités de maase introduites entrainent un décalage des fréquences propres vers les graves.

CHAPITRE VI

PLAQUES ASSEMBLÉES ENTRE ELLES

Il est possible d'étendre ces résultats à l'étude du couplage des plaques, de la même façon que nous avions résolu le problème des vibrations propres d'un portique "reposant" sur un sol élastique. Nous sommes ainsi amené à traiter un problème original particulier: étude des vibrations de cinq plaques carrées reliées solidairement par leur bords entre elles, constituant ainsi une "boîte cubique sans fond".

Les amplitudes en chaque point des plaques pourront être développées en fonction propre des poutres du portique, si l'on fait le même raisonnement que précédemment. Nous supposerons les plaques sans discontinuité de masse, ce qui entrainera des simplifications notables, dans l'expression des fonctions propres. Ces dernières seront celles de la poutre supérieure du portique, considérée comme libre (paragraphe III. A. 1 de la première partie), c'est à dire:

$$u_m = A_m (\text{sh } p_m \cos p_m x - \sin p_m \text{ ch } p_m x).$$

Les valeurs propres p_m sont données par:

$p_o = 0,86$; $p_1 = 3$; $p_2 = 6,07$; $p_3 = 7,27$.

Nous déterminerons A_m en posant $\Theta_{mm}=1$:

$$\Theta_{mm} = 8\, p_m\, A_m^2 \left[sh^2\, p_m\, (2\, p_m - \sin 2\, p_m) + \sin^2 p_m (2p_m - sh\ 2p_m) \right]$$

Pour obtenir les valeurs des coefficients a_{mn}^{pq} on calculera les quadratures habituelles. Les résultats sont transcrits dans le tableau IX ci-après.

En ce qui concerne les plaques inférieures, les fonctions propres utilisées, conformément à ce que nous avons trouvé dans l'étude du portique, sont données par:

$$u_m = B_m\ (sh\ q_m \sin q_m + ch\ q_m \cos q_m - 1)\ ch\ q_m\, x + \cos q_m\, x$$

$$+(sh\ q_m \sin q_m - ch\ q_m \cos q_m) \cos q_m\, x - sh\ q_m \cos q_m (sh\, q_m\, x + \sin q_m\, x)$$

$$- ch\ q_m \sin q_m\ (sh\ q_m\, x + \sin q_m\, x).$$

Ces solutions vérifient les conditions aux limites:

$u''(1) = u'''(1) = 0$ et $u''(0) = 4\mathcal{M}/EI$, $u'''(0) = 0$.

Les valeurs propres q_m correspondantes sont:

$q_o = 1,72$; $q_1 = 6$; $q_2 = 8,26$; $q_3 = 12,14$; $q_4 = 14,54$.

La condition de raccordement des plaques entre elles, donnera la relation entre B_m et A_m, nécessaire aux calculs des quadratures. Pour la plaque carrée, $q_m = 2p_m$ et :

$$(ch\ 2p_m \sin 2p_m + sh\ 2p_m \cos 2p_m)\ B_m = A_m\ sh\ p_m \sin p_m .$$

Les résultats de ces intégrations sont transcrits dans le Tableau X.

Nota: Les coefficients A_m et B_m sont supposés fonctions de $EI, \mathcal{M}$.

Indices m , n	θ	ω	φ	α
00	1	- 0,423	41,461	14,585
01	0,976	- 0,432	11,086	10,516
10	0,976	- 7,927	11,086	10,516
11	1	- 8,191	68,571	10,033
02	0,130	- 0,142	- 83,221	- 11,958
20	0,130	-20,080	- 83,221	- 11,958
12	0,338	- 3,067	181,226	0,856
21	0,338	-23,666	181,226	0,856
22	1	-21,866	996,913	49,240
03	- 0,196	0,005	-25 ,138	-10,916
30	- 0,196	1,635	-25 ,138	-10,916
13	0,002	- 0,301	44 ,685	- 1,693
31	0,002	- 4,914	44,685	- 1,693
23	0,913	-15,020	678,146	39,702
32	0,913	-31,773	678,146	39,702
33	1	-33,521	1169, 03	40,670

TABLEAU IX

Indices m, n	θ	ω	φ	α
00	0, 25	- 0, 326	1, 342	2, 931
01	0, 049	- 0, 048	11, 468	1, 111
10	0, 049	- 1, 384	11, 468	1, 111
11	0, 25	- 2, 406	132, 378	12, 836
02	- 0, 016	0, 044	2, 525	1, 063
20	- 0, 016	2, 634	2, 525	1, 063
12	0, 235	- 2, 043	97, 833	11, 222
21	0, 235	- 4, 301	97, 833	11, 222
22	0, 25	- 5, 201	175, 125	11, 543
03	0, 002	0, 026	-10, 194	2, 897
30	0, 002	8, 697	-10, 194	2, 897
13	- 0, 036	0, 383	-49, 876	- 1, 431
31	- 0, 036	4, 482	-49, 876	- 1, 431
23	0, 015	- 0, 071	94, 766	3, 837
32	0, 015	- 0, 396	94, 766	3, 837
33	0, 25	-12, 917	996, 721	26, 038

TABLEAU X.

Le calcul des a_{mn}^{pq} qui apparaissent dans les termes de l'énergie des plaques supérieures et inférieures donne les résultats suivants:

1°) Plaque supérieure:

$a_{00}^{00} = 436 - \lambda$ $\qquad$ $a_{10}^{01} = 102 - 0,95\lambda$

$a_{00}^{01} = 299 - 0,974\lambda$ $\qquad$ $a_{11}^{01} = 253,4 - 0,974\lambda$

$a_{01}^{01} = 188 - 0,95\lambda$ $\qquad$ $a_{11}^{00} = 346 - \lambda$

2°) Plaques inférieures:

$a_{00}^{00} = 40\,180 - 182\lambda$ $\qquad$ $a_{11}^{01} = 0,3 + 0,00363\lambda$

$a_{00}^{01} = 784 + 1,46\lambda$ $\qquad$ $a_{11}^{00} = 1358 - 0,453\lambda$

$a_{01}^{01} = 32,9 - 0,0116\lambda$ $\qquad$ $a_{10}^{01} = 128,4 - 0,0116\lambda$

.....

En vertu du principe de superposition, nous appliquons le principe de la moindre action à l'ensemble des plaques (le coefficient relatif à la plaque inférieure étant le double de celui qui se rapporte à la plaque supérieure). On aboutit ainsi au système linéaire représenté sur la figure 23.

En tenant compte de ce que $A_{mn} = A_{nm}$ dans une première série de modes propres et $A_{mn} = - A_{nm}$, la résolution de ce système, effectuée à l'aide d'une machine analogique type Dervaux, au laboratoire d'Acoustique-Vibrations du Centre de Recherches Scientifiques de Marseille, a donné les résultats suivants:

$\lambda = 216,9 \qquad 290,5 \qquad 2\,050 \qquad 2\,860$

Les fréquences propres correspondantes sont:

$N = 1\,840 \qquad 2\,130 \qquad 5\,660 \qquad 6\,860 \qquad (40)$

conformément à (39), soit : $N = 125,2\sqrt{\lambda}$

DETERMINANT AUX VALEURS PROPRES

Plaques assemblées.

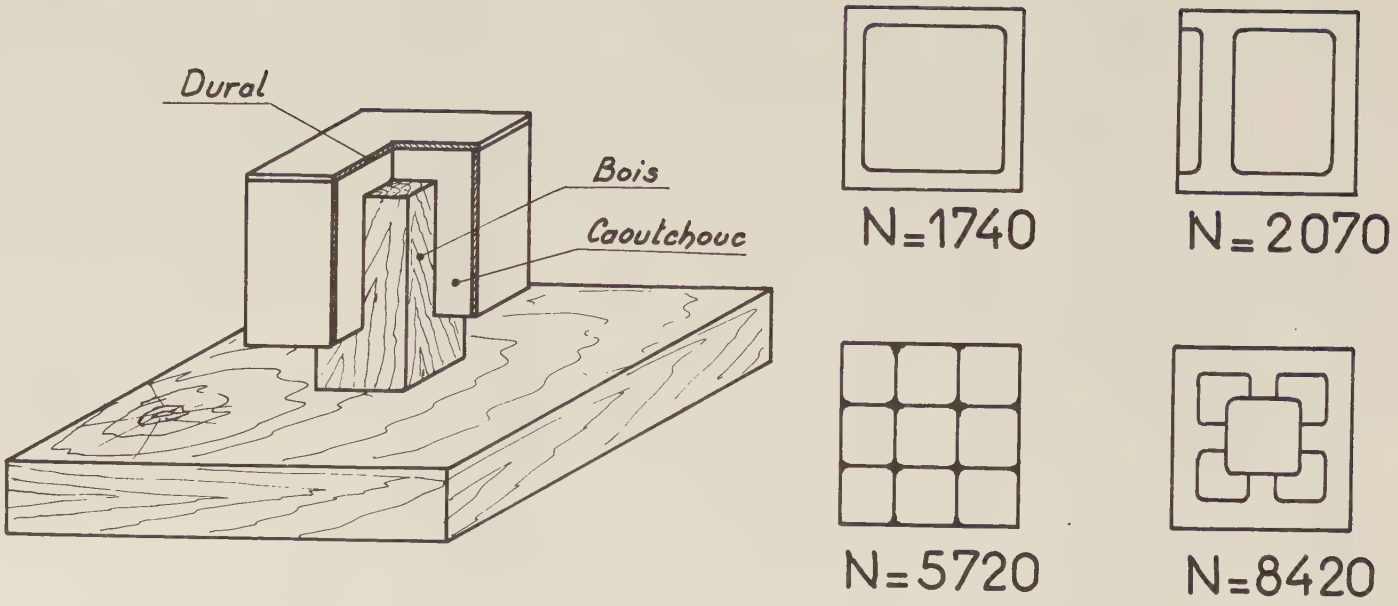
$$A_{oo}[80796-365\lambda]+A_{01}[1867+1,946\lambda]+A_{10}[1867+1,946\lambda]+A_{11}[253,8-0,983\lambda]=0$$

$$A_{oo}[1867+1,946\lambda]+A_{01}[3062-1,906\lambda]+A_{10}[458,8-0,983\lambda]+A_{11}[254-0,967\lambda]=0$$

$$A_{oo}[1867+1,946\lambda]+A_{01}[458,8-0,983\lambda]+A_{10}[3062-1,906\lambda]+A_{11}[254-0,967\lambda]=0$$

$$A_{oo}[2538-0,983\lambda]+A_{01}[254-0,967\lambda]+A_{10}[254-0,967\lambda]+A_{11}[344-1,0226\lambda]=0$$

Figure 23



- Figure 24 -

Etude expérimentale.

Le dispositif adopté est représenté sur la figure 24. L'excitation se faisant au centre de la plaque supérieure; les plaques reposaient sur un cube de bois par l'intermédiaire de caoutchouc mousse. Le support de bois était orientable de façon à pouvoir rendre horizontales les plaques de côté, et à obtenir ainsi leurs lignes nodales. La figure 24 rend compte égalemen des fréquences observées et des lignes nodales obtenues; notons la configuration particulière de certaines d'entre elles.

Nous rappelons ici ces fréquences propres:

N = 1 740 2 070 5 720 8 420 (41)

correspondant à la suite théorique (40).

Les quadratures nécessaires à l'élaboration des résultats du présent chapitre ont été calculées sur la machine Bull, du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de la Faculté des Sciences de Grenoble; nous sommes heureux, à cette occasion, de remercier M. Kuntzmann, Directeur de ce Laboratoire.

- BIBLIOGRAPHIE -

de la deuxième partie .

[1] Jullien Y: "Vibrations d'une plaque rectangulaire simplement soutenue au pourtour et soumise à une masse ponctuelle". C. R. Ac. Sciences, Fr (3 mars 1958) 246 n°9, p. 1371-74

[2] Timoshenko S: "Théorie des vibrations" Lib. Ch. Béranger, Paris (1939) p. 435-40. "Théorie de la stabilité élastique", Lib. Ch. Bér. Paris (1943) p. 275-315.

[3] Iguchi S: "Die Eigens Schwingungen und Klangfiguren den freien Rechteckigen Platte" Ing. Archiv. XXI, p. 303-322, Heft (1953).

[4] Krzywoblocki M. Z. v: "On the so-called principle of least work" Proc. of the first Midwestern conf. on Sol. Mech. held at University of Illinois.

[5] Ritz W: "Œuvres de Walter Ritz" éditées par la Société Suisse de Physique, Gauthier-Villars, Paris 1911, p. 286-314.

[6] Vogel Th: in "Méthodes de calcul dans les problèmes de mécanique" C. N. R. S. Paris 1949, p. 35-39.

CONCLUSIONS

Nous nous sommes proposé, au début de cette étude, de résoudre une classe particulière de problèmes aux limites, celle où, dans l'équation différentielle qui régit le système, le coefficient du terme d'ordre zéro est une fonction discontinue des variables indépendantes. Nous avons vu que nous savons en déterminer la solution en prolongeant la validité de l'équation en dehors du domaine D où est considéré ce système, ce prolongement pouvant entrainer, pour le coefficient ci-dessus, de nouvelles discontinuités en nombre fini ou infini.

Le domaine D étant successivement pris uni puis bidimensionnel, on a pu appliquer ces résultats à l'étude des vibrations de poutres et de plaques rectangulaires présentant des discontinuités de masse, ou reposant sur une fondation élastique discontinue (le coefficient de réaction de la fondation élastique et la distribution élémentaire de masse intervenant d'une façon analogue dans l'équation générale indéfinie).

Lorsque cette méthode nécessite une infinité de discontinuités, on répartit celles-ci le long d'un contour C, et le problème revient à déterminer ce contour et l'intensité des discontinuités en chaque point de celui-ci, de manière à annuler une certaine intégrale curviligne: c'est le cas de la plaque libre avec discontinuité de masse, la plaquenue devenant un cas particulier. Le calcul effectif reste cependant compliqué; il ne faut d'ailleurs pas s'en étonner vu la forme compliquée de la solution donnée par Iguchi, quant à la plaque nue; c'est ainsi qu ' on a recours à la méthode de Ritz pour pouvoir rendre compte des résultats et les comparer avec l'expérience. D'une façon générale, les discontinuités de masse semblent entraîner un décalage des fréquences propres vers les graves (aussi bien pour les poutres que pour les plaques).

La grande liberté du procédé théorique consiste essentiellement dans le choix du contour C, et rien ne semble s'opposer à ce que C corresponde à un domaine D limité par n'importe quel contour; on pourrait ainsi traiter les problèmes des vibrations transversales de plaques (avec ou sans discontinuité de masse) autres que rectangulaires.

Plus intéressant, serait le cas du domaine plongé dans un espace à trois dimensions; la méthode consisterait donc à déterminer une certaine surface S au lieu du contour C. On sait que, dans la théorie des vibrations des enveloppes, seuls quelques cas particuliers ont pu recevoir une solution; il y a peut-être là une application fructueuse de la méthode que nous avons exposée.

Enfin, nous ne nous sommes préoccupé que des applications à l'elasticité, et il est clair que des problèmes, appartenant à d'autres branches de la physique, et ressortissant mathématiquement de cette classe, peuvent être résolus par cette méthode.

TABLE DES MATIÈRES

pages.

Introduction 5

Première partie.
(Problèmes à une dimension) 11

CHAPITRE I:

Exposé de la méthode 13
A. - Equation générale indéfinie 13
B. - Solution générale 15
C. - Conditions aux limites et discussion 17

CHAPITRE II :

Vibrations de poutres 20
A. - Pas de masse fictive: poutre "guidée-encastrée" 20
B. - Une masse fictive 23
1°) poutre sur appuis aux extrémités 25
a) cas d'une seule masse 25
b) cas de deux masses 29
2°) poutre "encastrée-guidée" 30
3°) poutre libre 32
C. - Deux masses fictives 35
1°) poutre libre 36
2°) poutre encastrée 40
D. - Vérification expérimentale 42
1°) poutre libre 42
2°) poutre sur appuis 45
E. - Conclusions 47

CHAPITRE III:

Etude dynamique d'un portique 48
A. - Portique reposant sur un sol élastique 50
1°) poutre supérieure 50
2°) béquilles 52

B. - Portique enfoncé dans un sol élastique 55
C. - Vérification expérimentale 58
1°) portique reposant sur caoutchouc 58
2°) portique enfoncé dans du sable sec 61
D. - Etude statique d'un portique 62
1°) théorie 62
2°) mesures 63

CONCLUSIONS 70
BIBLIOGRAPHIE 71

Deuxième partie.
(Problèmes à deux dimensions) 73

CHAPITRE IV:

Méthode des masses fictives dans les problèmes à deux dimensions 75
A. - Principe 75
B. - Plaques appuyées et "guidées-encastrées" 78
1°) plaque appuyée sur ses bords 80
a) cas d'une masse réelle 80
b) cas de deux masses 82
2°) plaque "encastrée-guidée" 84
C. - Plaque libre 86
1°) pas de masse réelle 91
2°) une masse réelle 93

CHAPITRE V :

Méthode de Ritz (plaque libre présentant des discontinuité de masse) 96
A. - Rappel de la méthode de Ritz 96
B. - Plaque avec discontinuité de masse ponctuelle .. 99
1°) masse au centre de la plaque 101
2°) masse au quart de la plaque 104
C. - Vérifications expérimentales 105

CHAPITRE VI:

Plaques assemblées entre elles 111

BIBLIOGRAPHIE 119

- CONCLUSIONS - 120

IMP. LOUIS-JEAN – GAP
Dépôt légal n° 144 – 1961

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

SUR LA THEORIE DE L'ECOULEMENT HYPERSONIQUE NON VISQUEUX AUTOUR DES CORPS MINCES

Vu et approuvé :
Le Doyen de la Faculté des Sciences
P. ROUARD

Vu
Les Membres du Jury :
MM. J. VALENSI,
P. ROUARD,
H. CABANNES,
Th. VOGEL.

Vu et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie d'Aix-Marseille
J. BLACHE
9 Juin 1961